الجمهورية الجزائرية الديموقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

جامعة محمد لمين دباغين- سطيف

كلية العلوم الإنسانية و الاجتماعية

قسم الفلسفة

مطبوعة الدعم

خاصة بمقياس المنطق الرياضي

موجه إلى طلبة الماستر تخصص فلسفة عامة

من إعداد الأستاذ زهير قوتال

رموز المنطق الرمزي

∧ الوصل

↔ أو ≡ التكافؤ

←الزوم

Ǝ يوجد فرد على الأقل

Λ الوصل

V الفصل

P حرف ألف

C تضمن

ϵ ينتمي

∨ فصل

∧ وصل

» شولتين

« شولتين

□ مهما يكن

⌐ نفي

المنطق الرياضي

مقدمة :

إنّ هذه المحاضرات، التي تتناول بعض موضوعات المنطق العاصر، وهي ثمرة سنوات عديدة من التدريس، موجهة لطلبة السنة الأولى ماستر تخصص فلسفة عامة - ل م د- ،حول مقياس **المنطق الرياضي** ، تهدف أولا لأن تكون وسيلة عمل للذين يريدون معرفة بعض تقنيات المنطق المعاصر وطبيعة التفكير المنطقي الرياضي ؛ فقد قدمنا لهم منطق القضايا و منطق المحمولات انطلاقا من فكرة مفادها أنّ المنطق لغة تُعرْف وتحسب و تسمح لنا بالاستنتاج و الاستنباط في الوقت ذاته ، وتطوير ملكة الحكم المنطقي. ثم هي ثانيا وسيلة للنظر و التفكر في المنطق كآلة حسابية صماء في علاقتها باللغة الطبيعية وأيهما يصلح لأن يكون لغة الفلسفة، فضلا عن التدريب على صياغة الاحكام النقدية و نقد النصوص الفلسفية باستعمال اللغة الرمزية.

.و قد تناولنا فيه المحاور التالية :

أولا: أفكار أولية:حيث تناولنا فيه :

1- بعض المفاهيم المتعلقة بالموضوع :- المنطق الصوري - موضوع المنطق-المادة و الصورة - الصحة و الفساد - المنطق الصوري و المنطق المادي.

2- مفاهيم أساسية في المنطق الرمزي : القضية — دالة القضية — صورة القضية — الروابط و المتغيرات

ثانيا: حساب القضايا الكلاسيكية :و تناولنا فيه بالدرس الموضوعات التالية:

القضايا غير المحللة — دوال القضايا و دوال الصدق — قوانين الروابط المنطقية — جداول الصدق بأنواعها المطولة و المختصرة — و تصنيف الصور (تحصيل الحاصل و التناقض و التعارض)

ثالثا : النسق الاستنباطي : و تناولنا فيه مكونات النسق المنطقي وفق ما طرحه كل من **رسل و وايتهيد** نحو: الأفكار الأولية — مقدمات النسق (المسلمات و مجموعة التعريف و المصادرات) و قواعد الاستنباط (قاعدة الاستبدال الموحد و قاعدة الاستدلال و قاعدة التقرير) ثم المبرهنات و طريقة استنباطها و البرهان عليها

رابعا : حساب القضايا المحللة :

1- حساب المحمولات : و الذي تناولنا فيه القضية الحملية باعتبارها قضية مركبة يمكننا تحليلها إلى قضايا جزئية أو قل ذرية ، وتطرقنا إلى دراسة جملة من الموضوعات المتعلقة بالموضوع نحو: الموضوع و المحمول – سور القضية – ترميز القضايا الحملية التقليدية – القياس المباشر و حساب المحمولات من خلال مربع التقابل–

2- حساب الفئات: و الذي تناولنا فيه مفهوم الفئة و تعريفها من خلال **المفهوم و الماصدق** و عالم المقال و الفئة المتممة و الضرب المنطقي و الجمع المنطقي و التضمن و الهوية ثم العمليات الخاصة بحساب الفئات (القياس المباشر و غير المباشر)

و قد اعتمدنا في تدريسنا لهذا المقياس و في كتابتنا لهذه المطبوعة العديد من المراجع المتنوعة ذات الصلة بمحاور المقياس وهي باللغة العربية : عادل فاخوري ، المنطق الرياضي ،و محمد مهران ، مقدمة في المنطق الرمزي ،و محمد محمد سالم ،نظريات المنطق الرمزي ،ومحمود فهمي زيدان ، المنطق الرمزي نشأته و تطوره ،و أسعد الجنابي ، المنطق الرمزي المعاصر ، و عادل فاخوري ، منطق العرب ،و نجيب الحصادي ، أسس المنطق الرمزي المعاصر أحمد موساوي ، أما المراجغ باللغة الفرنسية فهي كالتي:

1-Alfred Tarski, Introduction à la logique, Marie –Louise Roure . éléments de logique contemporaine, Denis vernant, Introduction à la logique standard , François Lepage, Eléments de logique contemporaine, Thierry Lucas, initiation à logique formelle , Laurence Bouquiaux et Bruno Leclercq, Logique formelle et argumentation, et Xavier Verley, Logique symbolique.

1. مدخل

1.1تعريفات أولية:

أُطلق على المنطق الحديث « la logique moderne » عدة أسماء وذلك منذ نشأته في أواسط القرن التاسع عشر (19) بحسب تسلسلها التاريخي: المنطق الرمزي« la logique symbolique »، اللوجستيكا « la logistique »، جبر المنطق « la logique l'algèbre » والمنطق الرياضي « la logique Mathématique » والمنطق المصورن« la logique formalisée » . وكل هذه التسميات تناولت موضوعات المنطق الحديث بشكل أو بآخر .

وقبل الشروع في تناول المنطق الرمزي لابد لنا من لمحة تاريخية حتى نميز بين المنطق القديم والمنطق الحديث من جهة ، ثم نحاول استشكال مقولة "كانط" التي ادعى فيها بأن المنطق الأرسطي القديم منذ نشأته ووضعه على يد "أرسطو" كان كاملا أو قل مكتملا.

وحتى يكون استيعابنا لهذه المحطة التاريخية جيدا و مفيدا نعتقد أنه من الجدير والمهم أن نطرح بعض التعريفات والملاحظات التي تسمح لنا بتحديد مجال المنطق الصوري القديم ، وكذا تحديد الغرض من دروسنا، فالتعريفات الأولية سوف تكون لنا عونا في فهم و استيعاب المباحث القادمة.

– المنطق الصوري:

هناك عدة تعريفات قدمت وطرحت منذ أرسطو ، فمثلا القديس "أغسطينس"Saint Augustin سماه ب "علم العلوم" واعتبر المنطق في العصر الوسيط الأوروبي كمجال أو كقطاع يدرس شروط صحة العقل المفكر la raison raisonnante من خلال الخطاب في عمله الخاص والمتمثل في المعرفة العلمية[1] L'ars rationalisأو L'ars directiva ipsius rationis.

أما في العصر الإسلامي عرّفه أبو علي ابن سينا في كتابه"الإشارات والتنبيهات" بقوله:"المراد من المنطق أن يكون عند الإنسان آلة قانونية تعصمه مُراعاتها عن أن يضل في فكره".[2] والمنطق علم في نفسه ، وآلة بالقياس إلى

---

[1] marie – louise roure . éléments de logique contemporaine ed P.U.F. paris . 1967.P3.

[2] الشيخ الرئيس أبو علي بن سينا، الإشارات والتنبيهات ، تحقيق سليمان دنيا، مصر، دار المعارف، ط3، دون تاريخ، القسم 2،ص117.

غيره من العلوم، فهو علم آلة و ليس علم غاية كما يقول النُظار، وهذا ما ذكره الشيخ الرئيس في موضع آخر بقوله " العلم الآلي"[3] .ثم يضيف ابن سينا: "وأعني بالفكر ها هنا ما يكون عند إجماع الإنسان أن ينتقل عن أمور حاضرة في ذهنه متصورة أو مصدق بها تصديقا علميا أو ظنيا، أو وضعا وتسليما ، إلى أمور غير حاضرة فيه"[4]. ثم يتابع في مكان أخر بقول : " فالمنطق علم يتعلم فيه ضروب الانتقالات من أمور حاصلة في ذهن الإنسان إلى أمور مستحصلة ،وأحوال تلك الأمور"[5].

وإذا رجعنا إلى التراث المنطقي العربي الإسلامي نظفر على ثلاث مفاهيم إجرائية كانت تدخل في تعريف المنطق، وهي مفهوم القول ومفهوم الانتقال ومفهوم الطلب[6].

أولا: القول: "اعلم أنّ الغرض من المنطق التمييز بين الصدق و الكذب في الأقوال".[7] والقول هنا في تعريف التهانوي يمكن أن يكون جملة من اللغة الطبيعية كما يكون متوالية[8] Une suite من لغة اصطناعية، وهي عبارة عن سلسلة من الجمل أو كما قال أبو علي ابن سينا :" كون شيء بعد شيء بالقياس إلى مبدأ محدود وليس بينهما شيء من بابهما[9]"

ثانيا: الانتقال:

جاء في تعريف ابن سينا السابق قوله: " علم يتعلم فيه ضروب الانتقالات من أمور حاصلة في ذهن الإنسان إلى أمور مستحصلة...".[10] . وواضح من هذا التعريف أن هذا النوع من الانتقال يتخذ صورة مخصوصة وهي عبارة عن إنبناء شيء على شيء بحيث يضبطه قانون مخصوص يتوصل المنطقي إلى معرفته وإلا انتفت فائدة هذه الصورة.

---

[3] المرجع نفسه،ص117.

[4] مرجع نفسه، ص 119و121.

[5] المرجع نفسه، ص 127 و128

[6] أنظر طه عبد الرحمن ، اللسان والميزان، المركز الثقافي العربي ، بيروت – الدار البيضاء،ط2 ،2006،ص86.

[7] التهانوي ،كشاف إصطلاحات الفنون والعلوم، تحت إشراف رفيق العجم لبنان ناشرون ، بيروت ، ط1، ج1، ص46.

[8] اللسان والميزان ،مرجع سابق،ص86.

[9] عبد الأمير الأعسم ، المصطلح الفلسفي عند العرب ، نقلا عن طه عبد الرحمن ، مرجع سابق ،ص86.

[10] أنظر الهامش 5.

ثالثا : الطلب.

من الواضح أن الأقوال المنتقلة إليها هي أقوال **مطلوبة** ، ومن التعريف السابق لابن سينا استخدم فيه صيغة **استفعل** من مادة **حصل** وهي :**استحصل**، وتفيد هذه الصيغة الصرفية كما هو معلوم في اللغة العربية معنى الطلب وبالتالي فإن هناك أمر مطلوب حصوله.

ومن خلال هذه المفاهيم الإجرائية الثلاثة يمكن صياغة تعريف للمنطق يجمع بين الأصالة والمعاصرة في مجال المنطق وهو: "المنطق علم يبحث في قوانين الانتقالات من أقوال مسلم بها إلى أقوال مطلوبة".[11]

وقد تفطن بعض المشتغلين بالمنطق من علماء الإسلام إلى أهمية هذه المفاهيم الثلاثة حيث جمعها في مفهوم واحد وهو مفهوم " **اللزوم**"، ذلك أن اللزوم يفيد معنى الانتقال فنقول: لزم شيء من شيء ، أي انتقل من شيء إلى شيء بمعنى تولد منه بنقلة مخصوصة.[12]

كما أن مفهوم اللزوم يفيد معنى **الاقتضاء** الذي يضمن مدلول **الطلب** فإذا لزم شيء عن شيء فقد اقتضاه هذا الشيء وطلبه ؛ أما مدلول اللزوم في الأقوال فإنه يقال: " لزم عن قوله كذا" ، ويسمى القول الذي لزم منه قول آخر با**لملزوم** ويسمى هذا القول الآخر با**لازم**. وعليه يمكن تعريف المنطق بأنه:" **علم يبحث في قوانين اللزوم** ".[13]

– موضوع المنطق:

برغم الاختلافات الكبرى بين المناطقة في تحديد موضوع علم المنطق ، فإنه باستقراء أهم الاتجاهات المنطقية يمكن استخلاص أهم الموضوعات التي تناولها المناطقة وهي كما يلي:

أ– البحث في الانتقال من المحسوس الجزئي إلى المعقول الكلي وما يتعلق بها البحث من كلام عن وظائف الحواس و الإدراك الحسي والمخيلة و الذاكرة و العادة و التداعي، أي كل ما له علاقة بالجانب النفسي.

---

[11] اللسان والميزان ، مرجع سابق، ص87.
[12] المرجع نفسه ، ص 88.
[13] المرجع نفسهن ص 88،

ب- البحث في الألفاظ والحدود أو المفردات les termes ، ويتناول تصنيفات مختلفة للألفاظ ، كالألفاظ المتواطئة والمشككة، والمترادفة، والمتضادة ، الجزئية ، والكلية وهذا المبحث متعلق باللغة.

ج- البحث حول المقولات وطريقة اشتقاقها وفقا لمنطق ينتجها ويحصر عددها وكذلك يبحث في الأجناس و الأنواع وما يتصل بذلك من بحوث في نظرية التعريفات وهو مبحث فلسفي بامتياز.

د- البحث في القضايا والتصديقات و هو مبحث منطقي.

هـ- البحث في قوانين الفكر، الهوية وعدم التناقض، والثالث المرفوع، والجوهرية، والعلية، وكلها مباحث فلسفية.

و- البحث في الاستنباط والاستقراء والتمثيل وعلاقتهم بالقياس وهذا كله يدخل في باب المنطق.[14]

ومما سبق ذكره يمكننا أن نقول أنه روعي في وضع مسائل المنطق و في ترتيبها حاجة المتعلم للمنطق لا حاجة العلم المنطقي في حد ذاته ، فنشأ عن تلك الحاجة أن أُلحقت بعلم المنطق الصوري ،الذي كان غرضه الأول والوحيد الاستنباط وقوانينه، فصول ليست من جنسه، كالبحث والنظر في الألفاظ والحدود les termes أو النظر في التصورات والتي هي مسائل لغوية في الأساس ثم يأتي بعد ذلك فصل خاص بالتصديقات أو قل القضايا التي تتركب من تلك الألفاظ أو تصوراتها. ثم يتدرج المنطقي من تلك القضايا إلى ما يتركب منها من استنباطات قياسية و المنتجة منها خاصة و ذلك لارتباط الأقيسة بالمعاني أي بمعاني الألفاظ و دلالاتها. إنّ التدرج من هذه الألفاظ إلى ما يتركب منها من قضايا ثمّ إلى ما يتركب من هذه القضايا إلى أقيسة منتجة ، إنما هو تدرج من البسيط إلى المركب الذي يراعى فيه الجانب التعليمي، بينما لا يحتاج العلم المنطقي إلا إلى النظر في قوانين الاستنباط وحدها ، وعليه يمكن أن نقول أن المنطق يدرس ويشتغل على أنواع الانتقالات وقوانينها.

- المادة والصورة:

نميز في كل استدلال ما بين المادة والصورة la matière et la forme فالمادة أو المحتوى هي الأغراض والموضوعات التي نعالجها أو هي خواص تلك الموضوعات التي نتلفظ بها.[15]

---

[14] علي سامي النشار ،المنطق من ارسطو حتى عصورنا الحاضرة ، دار المعرفة الجامعية،مصر ،طبعةسنة 2000، ص17 -38

[15] Marie – Louise Roure . Eléments de logique contemporaine op cit p3.

أما الصورة أو البنية la structure هو ما تبقى من الاستدلال عندما نجرده من مادته ومحتواه أي من موضوعاته.[16] ففي الاستدلال الكلاسيكي المعروف :

كل إنسان فان.

سقراط إنسان.

إذن سقراط فان.

يمكننا أن نبرر بوضوح أكبر صورة استدلال هذا وذلك باستبدال الحدود (الألفاظ) التي تعبر عن المادة بحروف أ، ب ، ج بحيث يكون لدينا صورة القياس التالي:

كل أ هي ب.

ج هي أ

إذن ج هي ب.

– الصحة والفساد:

حين نقول أن صورة القياس صحيحة valide مهما تكون الألفاظ (الحدود) التي استبدلناها في المثال السابق بالحروف أ ، ب ، ج أي على أساس الصورة أو قل البنية وحدها، فصحة أو فساد « la validité ou l' invalidité » استدلال ما يتعلق إذن بصورته فقط لا غير ، فصورته أ بنيته مستقلة عن مادة القضايا وموضوعاتها التي تؤلفها و بالتالي فهي مستقلة عن صدق هذه المضامين أو كذبها، فالقضايا يمكن أن تكون صادقة أو كاذبة أما القياس او الاستدلال فلا يمكنه أن يكون إلا صحيحا أو فاسدا.[17]

16 Ibid.p3

17 I bid p4

– المنطق الصوري والمنطق المادي:

المنطق الصوري هو الذي يقوم كليا على تجريد الاستدلال من المادة أي من المضامين ، بينما المنطق المادي هو الذي يأخذ في استدلالاته في دراسته للصور بمجموعة الأغراض العلمية « les objets scientifiques » الذي يطبق عليه الاستدلال ، وهو الذي نجده في مجال المناهج العلمية ، وقد أُطلق في العصور الوسيطة على المنطق الصوري اسم "المنطق الصغير" la logique mineure، وعلى المنطق المادي اسم "المنطق الكبير" la logique majeure . والمنطق المادي في وقتنا الراهن هو موضوع الدراسات الابستيمولوجية ومنهجيات العلوم.[18]

[18] I bid .p4

2- حساب القضايا الكلاسيكية :

1.2- المفاهيم الأساسية:

أ- القضية ودالة القضية:

القضية proposition في أبسط تعريف مشهور لها هي الجملة الخبرية التي تحتمل الصدق والكذب أو قل هي :" ذلك القول الذي اتصف صاحبه أو قائله بأنه صادق فيه أو كاذب ويطلق عليه مناطقه المسلمين اسم **التصديق**(جمعا التصديقات)"[19].

أمثلة:

1 / سطيف مدينة في الشرق الجزائري (قضية بسيطة)

2 /إذا طلعت الشمس فسوف يسافر زكرياء (قضية مركبة بحرف الشرط والجزاء).

3 / 5+5=9 (قضية بسيطة)

4 / إما زيد قد أضاع المال أو عمر هو اللص (مركبة-- إما ... أو--).

5 / ليست الأرض ساكنة (قضية بسيطة منفية) .

إذا حققنا في تركيب هذه الأمثلة نجد أنها على صنفين: صنف يتحلل إلى أجزاء ، بعضها قضايا ويسمى قضايا مركبة، والصنف الآخر لا يحتوي على أي جزء يؤلف قضية ويسمى هذا الجزء قضايا بسيطة.

دالة القضية: أو قل الدالة أو التابع ،أي تركيب من القضايا أي المتغيرات وتسمى بالمتبوعات les arguments. فقولنا : الكرسي أحمر. قضية ، أما قولنا : س ص فهي دالة ذات متبوعين س ، ص.

أما ق ∧ ك هي دالة (تابع) مركبة من متبوعين ق، ك.

و 2س = ع^2 هي دالة مركبة من س ، ع.

---

[19] أنظر كتاب التعريفات للجرجاني ، مكتبة لبنان ، بيروت، 1999،ص183

صورة القضية:

لنقابل بين القضيتين الآتيتين :

- إذا أمطرت السماء أو تساقط الثلج، فلا يذهب محمد في نزهة.

- إذا كانت هذه القطعة من خشب أو كانت من زجاج، فلا تكون موصلة للحرارة،

إذا لاحظنا القضيتين السابقتين يتبيّن لنا أن تركيبيهما، رغم اختلاف المضمون (المادة) ،هو واحد لأن كل قضية منهما تحتوي على ثلاث قضايا جزئية تربط بينها على ترتيب معين، الحروف نفسها. وهذا القالب أو الشكل المشترك ، الذي تتخذه كل قضية من القضيتين السابقتين، نستطيع أن نؤديه على النحو التالي:

" إذا......أو.....فلا..... "

حيث الفسحات(.....)،(.....)، (.......) تشير إلى مجالات أو أماكن فارغة، يمكن تعبئتها بقضايا، فنعوض مكان تلك الفسحات، أحرفا أبجدية هي: ق ، ل ، م نطلق عليها اسم "متغيرات القضية" ونكتب الشكل السابق على النحو:

"**إذا** ق **أو** ل **فلا** م "

ولا شكّ أن هناك فرقا بين الصيغة (**إذ** ق **أو** ل **فلا** م) وبين إحدى القضيتين السابقتين لأنه بالنسبة للعبارة الأولى لا يمكن البتّ في الصدق والكذب ، بينما بالنسبة للقضيتين فإننا نستطيع ذلك لمعرفتنا بصدق أو كذب القضايا الجزئية البسيطة التي تدخل في تركيبهما.

أما العبارة الأولى فليست بقضية إذ التقرير بأنها صادقة أو كاذبة خال من المعنى فهي لا تتعين إلا بإحلال قضايا محل المتغيرات ولهذا نطلق عليها منذ أرسطو اسم صورة القضية la forme de la proposition وهي عبارة عن متتالية (متوالية) من الرموز تحتوي على متغيرات بحيث إذا أحللنا قضايا محل المتغيرات على نحو ملائم نحصل على قضية.[20]

2.2-الروابط (الثوابت) والمتغيرات:

[20] Alfred Tarski ,Introduction à la logique éd. Gauthier-villars, Paris,p3-8

نلاحظ مما سبق أن القضايا قد تُنفى بزيادة حرف السلب عليها، أو أنها قد تتركب مع بعضها البعض، بواسطة أحرف معينة لا تتغير مثال: "و"، "إذا...ف "، "إما ...أو" الخ لتؤلف قضايا أكثر تعقيدا فهذه الحروف التي تتم بها عمليات السلب أو التركيب ، نطلق عليها اسم **الروابط** ونطلق عليها كذلك اسم **"الثوابت"** باعتبار أنها لا تتغير مهما تغيرت الحدود والقضايا.

أما الحدود والقضايا فإنّنا نطلق عليها اسم المتغيرات باعتبار أنها تحتمل معاني غير محددة أو قل متغيرة ، ويطلق على الأشياء المحددة التي يمكن وضعها في مكان المتغير ليصبح للقول معنى محددا، اسم قيم valeurs وتشكل هذه القيم مجال تطبيق المتغير.

مثال: 2س + ع =10.

يمكن أن نضع مكان س و ع أي عددين ليصبح الناتج عن ذلك قضايا بعضها سيكون صادقا ، وبعضها الأخر يكون كاذبا ،فإذا وضعنا على سبيل المثال العددين 3 ،4 مكان س، ع على التوالي لكان الناتج قضية صادقة أما إذا وضعنا مكانهما 5 و2 كان الناتج قضية كاذبة.

وقيم المتغيرات في المنطق قد تكون حدودا أو قضايا أو دوال قضايا أو فئات أو علاقات وهكذا فإذا قُلت:

- ألقى كل من **ق** و **ل** كلمته.

لكان من الواضح أن قيم المتغيرين **ق**، **ل** لابد و أن تكون أشخاصا و إلا لكان القول لغوا لا معنى له .

وإذا قلت ، إذا كانت ق كانت ل.

لكانت قيم المتغيرين "ق" و" ل" عبارة عن قضيتين يلزم عن صدق الأولى صدق الثانية. و يتضح أن السياق الذي يرد فيه المتغير هو الذي يحدد دائما نوع القيم التي يمكن أن يأخذها المتغير، بحيث يكون الناتج قولا يحمل معنى.

وتستخدم المتغيرات في المنطق لأغراض مشابهة للأغراض التي تستخدم لها في الرياضيات ، فهي فضلا عما تتيحه من بساطة في التعبير المنطقي ووضوحه تظهر لنا بجلاء كامل " الصورة" الخالصة للقضية أو الحجة المنطقية دون النظر إلى مادتها(محتواها) وهذا من شأنه أن يصل بنا إلى عمومية كبيرة تنصبُّ على الصورة وحدها، تلك التي تصاغ

على هيئة قانون عام لا ينطبق على مثال بعينه أو حالة بعينها ، بل على كل الحالات الممكنة: " إن العمومية تأتي أساسا من الصورة المنطقية التي توضحها المتغيرات".

مثال:

إذا أدى كل فرد واجبه، لعاش الجميع بسلام.

فإذا أردنا أن نصوغ هذه القضية المركبة على شكل صورة عامة فإننا ،أولا وقبل كل شييء، نحذف المحتوى فيكون لدينا:

إذا( ) لـ ( )

و في هذه الصيغة أو قل هذا التعبيرالصوري يقوم كل زوج من الأقواس مقام قضية من القضيتين اللتين ينطوي عليهما القول السابق، وهو قضية مركبة، فإذا استخدمنا المتغيرات لصار عندنا:

إذا كانت **ق** لكانت **ل**.

فهي صورة عامة يمكن أن تأخذ قيما لا حصر لها . وهذه هي إحدى مميزات استخدام المتغيرات.

– المتغير القضائي القضيوي :le variable propositionnel: وهو يقوم مقام قضية بأكملها وليس مقام حد من حديها.

– المتغير الحملي أو الحدي le variable prédicatif: وهو يقوم مقام الحد الذي هو جزء من قضية بسيطة.[21]

أمثلة:

1- إما أن أقرأ كتابا في المنطق أو أن أذهب إلى المكتبة

2- المعادن تتمدد بالحرارة.

[21] Ibid . p7_10

فالمثال الأول: مركب من قضيتين مرتبطتين بأداة البدائل (إما...أو)

ومن القضية: أقرأ كتابا في المنطق.

ومن القضية: أذهب إلى المكتبة.

وإذا ما ستبدلنا القضيتين بمتغيرين نقول:

إما **ق** أو **ل** فيكون كل من ق و ل متغيرا قضيويا (نسبة إلى القضية)

***أما في المثال الثاني**: فإن القضية تتألف من حدين ،حد الموضوع (المعادن) وحد المحمول (تتمدد بالحرارة) فإذا استبدلنا الحدين بمتغيرين لصار لدينا:

أ هو ب: المتغير (أ) يقوم مقام حد الموضوع.

المتغير (ب) يقوم مقام حد المحمول.

وعليه يكون كل من **أ** و **ب** متغيرا حمليا (حديا).

3.2 الروابط ورموزها:

– رابط السلب[22]:

للتعبير عن سلب القضية، نستعمل في اللغة العربية أدوات كثيرة منها: لا ، لن ، ما ، ليس(فعل ناقص) وقد تدخل هذه الكلمات على القضية التي يراد نفيها في مواضع مختلفة في أول القضية كما في داخلها .

أما نحن في المنطق الرمزي فنريد أن نستعيض عن كل هذه الكلمات برمز جديد هو: $\neg$ نكتبه دائما في أول القضية.

[22] Ibid.p18.

فمثلا القضايا التالية:

- لم يشرب أفلاطون السم : ¬ يشرب أفلاطون السم.
- العدد 5 ليس أكبر من 3 : ¬ العدد 5 أكبر من 3.
- النيل لا يصب في البحر الأسود: ¬النيل يصب في البحر الأسود

وإجمالا "ليس **ق**" نرمز إليها بالرمز (**¬ ق**).

فيما يخص عمل أداة السلب من الناحية الصدقية (قيم الصدق) فإنها تدخل على القضية وتجعلها كاذبة إن كانت صادقة ، وصادقة إن كانت كاذبة. ويمكن تلخيصها في الجدول التالي:

ق	¬ ق
ص	ك
ك	ص

حيث ص و ك هما اختصار للعبارتين صادق و كاذب التي يطلق عليها اسم القيم الصدقية. وتسمى الجداول التي تحدد الروابط بالقيم الصدقية بجداول الصدق[23].

و رابط السلب أو النفي يُسمى بالرابط الأحادي لأنه لا يربط بين قضيتين أو أكثر بل يُسند إلى قضية واحدة أو إلى جهة واحدة . وبعدما فرغنا من رابط السلب الأحادي نتناول الروابط الثنائية:

- **رابط الوصل:**

أمثلة: لدينا قضيتين:

1- المتنبي شاعر/ 2- ابن الهيثم عالم.

فإذا أردنا أن نربط بينهما ونثبت صدقهما معا، فإننا نستعمل أداة الربط أو قُل أداة العطف ونكتب:

[23] Xavier Verley, Logique symbolique, éd.Ellipses, Paris, 1999,p16

3- المتنبي شاعر بينما ابن الهيثم عالم ،أو المتنبي شاعر وابن الهيثم عالم ، وبدل "**الواو**" أو "**بينما**" أو العبارات التي لها وظيفة الوصل نُدخل الرمز الجديد – ∧ – فتصبح لدينا القضية المركبة السابقة كما يلي:"المتنبي شاعر ∧ ابن الهيثم عالم" ونسميها بالقضية المتصلة أما تعريف رابط الوصل فهو أن هذا الرابط يُركب قضية جديدة من قضيتين، بحيث أن القضية الحاصلة أو الجديدة تكون صادقة إذا ما كانت كل واحدة من القضيتين الفرعيتين صادقة وكاذبة في بقية الحالات وبطريقة الجدول[24]:

ق	ت	ق ∧ ل
ص	ص	ص
ص	ك	ك
ك	ص	ك
ك	ك	ك

ملاحظة : هناك فارق مهم بين الروابط والعبارات المقابلة لها في اللغات الطبيعية وهو أن الروابط (الثوابت) في المنطق الرمزي لا تعتمد إلا على القيم الصدقية للقضايا، ولا تتطلب أي شرط آخر من اشتراك في الموضوع أو وحدة في السياق وغير ذلك من الاعتبارات كما تفعل العبارات المقابلة لها في اللغات الطبيعية فمثلا القضية المتصلة:

5 عدد أولي ∧ ابن سينا فيلسوف:

قد لا تجد هذه القضية قبولا في اللغات الطبيعية بينما هي من جهة المنطق الرمزي مشروعه بل صادقة وهذا الفارق يبرز خصوصا في استعمال القضية الشرطية.

[24] Laurence Bouquiaux et Bruno Leclercq, Logique formelle et argumentation , éd. De boecq, Bruxelles,2009.p21.

- **رابط الفصل:**

يشار إلى هذا الرابط (الثابت) بالرمز **v** وهو مأخوذ عن الحروف الأولى للكلمة اللاتينية vel التي تعني "إما....أو" وما شاكلها من الأدوات ،أما تعريفه فيمكن تحديده من الجدول التالي[25]:

ق	ل	ق **v** ل
ص	ص	ص
ص	ك	ص
ك	ص	ص
ك	ك	ك

تسمى هذه القضية **"بالقضية المنفصلة"** وتكون صادقة في حالة صدق القضيتين "ق" و " ل" معا أو صدق أحدهما وكذب الأخرى ، أما في حالة كذبهما معا فإنها تكون كاذبة.

مثال ذلك:

إما أن يدرس زيد الفلسفة أو يدرس الرياضيات.

إما "ق" أو "ل"   ق **v** ل.

فهذه القضية تصدق إذا درس زيد إحدى المادتين فقط أو درسهما معا ويسمى الانفصال في هذه الحالة باسم **"الانفصال الضعيف" disjonction inclusive** .

مثال آخر: إما 3+2=5 أو باريس عاصمة فرنسا.

[25] Ibid.p22

أما **الانفصال القوي** **disjonction exclusive**[26]: ويسمى بالانفصال أو الفصل ألاستبعادي كذلك وتعني فيه لفظة "أو" هنا واحدا على الأقل وواحدا على الأكثر.

مثال: إما زيد في الجامعة أو هو في البيت.

فيكون معنى ذلك أن إحدى القضيتين "زيد في الجامعة" أو "هو في البيت" صادقة ، ولا يمكن أن تصدق القضيتان معا فبينهما عناد تام وبذلك لابد أن تكون إحداهما صادقة و الأخرى كاذبة، وعليه يكون جدول الصدق كالآتي:

ق	ل	ق W ل
ص	ص	ك
ص	ك	ص
ك	ص	ص
ك	ك	ك

*حيث الرمز "W" يعني رابطة الفصل القوي exclusive.

*وتسمى كذلك رابط التباين[27] ويرمز له بالرمز: >—<

ويمكن أن نقول بتعبير اللغة العربية في المثال التالي:

"إما أن زيدا في البيت أو هو في الجامعة" : إما....أو هنا لا يفيد اجتماع القضيتين معا بل يجب أن يكون الاختيار بين إحدى القضيتين.

[26] Ibid.p21

[27] عادل فاخوري ، المنطق الرياضي ، المؤسسةالجامعية للدراسات و النشر ن بيروت ، ط 2، 1988 ،ص21-22

- **رابطة الشرط (الاستلزام):l'implication**

تلعب الأدوات (إذا...ف) دورا مهما في اللغة الطبيعية (العادية) و في لغة العلوم، ولذا تشعبت معانيها وكثُر الالتباس حولها حتى شغلب تفكير المناطقة قديما وحديثا:

– فتارة تستعمل بمعنى الاستنتاج المنطقي كما في قولنا : "**إذا كان كل إنسان فان فيزيد فان**".

– وطورا تدل على علاقة سببية بين حالتين في قولنا:" **إذا حمى الحديد فإنه يتمدد** ".

– وأحيانا تُنبئ عن تصرف شخص ما:"**إذا كان الجو مشمسا فسيذهب علي إلى الغابة للصيد**".

وقد تفيد معان أخرى عديدة يصعب ضبطها ولكن نحن في المنطق الرمزي سوف نوجه اهتمامنا إلى ما هو مشترك وعام لجميع هذه الأمثلة وندرس فقط العلاقة الصدقية ما بين القضية الأولى والتي تسمى المقدم l'antécédent والقضية الثانية التي تسمى التالي le conséquent ونستخدم الرمز => أو ⟵ أو ⊃ للإشارة إلى رابط الشرط الذي نعرفه بهذا الجدول[28]:

ق	ل	ق ⟵ ل
ص	ص	ص
ص	ك	ك
ك	ص	ص
ك	ك	ص

*على هذا الأساس تصدق القضايا التالية رغم أنها تبدوا غريبة وبعيدة عن الاستعمال الطبيعي لعدم وجود أدنى لحمة وشبه بين الطرفين.

_ إذا كان 2+3=5 فالقاهرة عاصمة مصر.

[28] Laurence Bouquiaux et Bruno Leclercq, Logique formelle et argumentation, op.cit.p22.

_ إذا كان 2+3=4 فالقاهرة عاصمة مصر.

_ إذا كان 2+3=4 فالقاهرة عاصمة الجزائر.

بينما تكذب القضية الشرطية la conditionnelle : فقط في حال صدق المقدم وكذب التالي:

إذا كان 2+3 = 4 فالقاهرة عاصمة الجزائر.

مثال آخر: لو ذهبت إلى باريس لقضيت وقتا ممتعا مع الثقافة.

لو كانت **ق** لكانت **ل**. أي " لو صدقت **ق** لصدقت **ل**".

وتتوقف قيمة الصدق اللزومية على قيمة صدق المقدم والتالي : فإذا صدق المقدم ، فلابد أن يصدق التالي و إلا كانت القضية اللزومية كاذبة ، وإذا كذب التالي فلابد أن يكذب المقدم وبذلك تكون القضية اللزومية صادقة تحت جميع شروط الصدق فيما عدا الحالة التي يكون فيها المقدم صادقا والتالي كاذبا.

- رابط التشارط أو التكافؤ (↔ ، ≡) l'équivalence[29]

نطلق عليه اسم التشارط لأنه يجمع بين الشرط والشرط المعكوس ونرمز إليه بـ "↔" أو ≡ ؛ كما نستعمل لفظ التكافؤ باعتبار أن القضيتين تكونان متكافئتين، إذا كان المعنى في احداهما هو نفسه في الأخرى ، إلا أن معنى التكافؤ في المنطق يختلف عن هذا المعنى المألوف في حياتنا اليومية: بحيث يقال عن القضيتين أنهما متكافئتان حين تكون كل منهما صادقة أو كل منهما كاذبة أي في حالة صدقهما معا أو كذبهما معا.

وتؤدي اللغة العربية رابط التشارط بالعبارة : "إذا...ف... وبالعكس" ونادرا ما تؤديه بالعبارة "...فقط إذا...." ومع ذلك فإننا نختار الأخيرة لقربها من المصطلحات الأجنبية ...si et seulement si.... الفرنسية أو « ...if and only if... » الأنكليزية، فنقول مثلا:

النهار موجود فقط إذا كانت الشمس طالعة.

2+3=4 فقط إذا كان العدد 4 أوليا.

[29] Ibid.p23.

و لكن هناك اللفظ " **حتى** " يستعمل لأداء معنى التكافؤ كما استعمله القدامى . و الجدير بالذكر أنّ القضية التكافئية التشارطية لا تفترض أية علاقة بين طرفيها ، ولا تهتم إلا بالقيم الصدقية أما تعريف التشارط فهو حسب الجدول التالي :

ق	ل	ق ↔ ل
ص	ص	ص
ص	ك	ك
ك	ص	ك
ك	ك	ص

ويمكن وضع جدول يجمع كل العمليات السابقة فنكتب كما يلي[30]:

الحالات	ق	ل	ق∧ل	ق∨ل	قWل	ق→ل	ق↔ل	¬ ق
1	ص	ص	ص	ص	ك	ص	ص	ك
2	ص	ك	ك	ص	ص	ك	ك	ك
3	ك	ص	ك	ص	ص	ص	ك	ص
4	ك	ك	ك	ك	ك	ص	ص	ص

ويمكن كتابة الجداول بطريقة أخرى:

[30] عادل فاخوري ، مرجع سابق ، ص24.

الوصل:

ق	ل	ق ∧ ل
ص	ص	ص
ص	ك	ك
ك	ص	ك
ك	ك	ك

أي

¬ ∧	ص	ك
ص	ص	ك
ك	ك	ك

الفصل الضعيف أو الشامل[31]:

ق	ل	ق ∨ ل
ص	ص	ص
ص	ك	ص
ك	ص	ص
ك	ك	ك

[31] أنظر محمد محمد قاسم ، نظريات المنطق الرمزي ، دار المعرفة الجامعية،مصر ، 2002،ص49.

أي

ר V	ص	ك
ص	ص	ص
ك	ص	ك

الفصل القوي التباين العنادي:

ق	ل	قW ل
ص	ص	ك
ص	ك	ص
ك	ص	ص
ك	ك	ك

أي

ר W	ص	ك
ص	ك	ص
ك	ص	ك

الاستلزام الشرطي:

ق	ل	ق ← ل
ص	ص	ص
ص	ك	ك
ك	ص	ص
ك	ك	ص

يستلزم:

¬ ←	ص	ك
ص	ص	ك
ك	ص	ص

***التشارط التكافؤ (≡ / ↔):**

ق	ل	ق ↔ ل
ص	ص	ص
ص	ك	ك
ك	ص	ك
ك	ك	ص

أي

↔ ٦	ص	ك
ص	ص	ك
ك	ك	ص

و بإمكاننا أن نعوض ص، ك ، بـ 1 ، 0 على التوالي:

العطف: $\overrightarrow{1000}$.[32]

الفصل الأضعف: 1110.

الفصل الأقوى:0110.

الاستلزام: 1011.

التكافؤ: .1001

4.2– مجال الثوابت[33]:

المقصود بمجال الثوابت هو المنطقة التي يتحكم فيها الثابت في الدالة أو قل مجال تطبيق الثابت.

مثال:

ق V ل ← م.

لدينا ثابتان هما :V ، ← وثلاثة متغيرات ق ، ل ، م ، و السؤال المطروح ما يمكن أن تكون هذه الدالة؟ هل هي دالة انفصالية أم لزومية؟.

إننا لا نستطيع أن نحسم هذا الأمر على الإطلاق ويمكن تفسير هذه الصيغة على وجهتيه:

---

32 نقرأ الأرقام من اليسار إلى اليمين فنقول 1، 0،0،0

33 محمد مهران ، مقدمة في المنطق الرمزي ، دار الثقافة القاهرة ، 1987،ص 78.

- (**ق** V **ل**)← **م** و هي في هذه الحالة دالة لزومية، إذا صدقت **ق** أو **ل** صدقت **م**

- قV (ل←م) و تكون في هذه الحالة دالة انفصالية ،أي إما أن تكون **ق** أو تكون **ل** يلزم عنها **م**

ولكي نفهم المقصود بالصيغة الأصلية كان لابد لنا أن نستعمل الأقواس ابتداء وكذلك باختيار أحد المعنيين اللزوم أو الانفصال وبذلك تصبح الدالة مفهومة.

وكذلك في القضايا التالية:

مثال:

ما صام زيد واعتكف . يحتمل في اللغة العربية إحدى الصيغتين

_ إما (ما صام زيد و ما اعتكف).

_ أو (ما صام زيد ولكنه اعتكف).

ومثال 2: سوف يسافر سمير إلى القاهرة وسوف يذهب أخوه إلى دمشق إذا انتهى الامتحان.

في هذه القضية لا نستطيع أن نقطع إذا كان سفر سمير مشروطا هو أيضا بانتهاء الامتحان أم لا. ففي هذه الحالة تعتمد اللغات الطبيعية على السياق والمقام لرفع الإبهام، أو باستعمال العلامة الإعرابية أو أدوات الربط الثنائية وهكذا. أما في المنطق الجديد فإنه يستخدم الأقواس لتعيين الضم والتفريق ما بين القضايا وهذه الطريقة تتميز بالبساطة والضمان[34] فنكتب القضية الأولى:

ما صام زيد واعتكف.

(ما صام زيد) واعتكف. / ما(صام زيد واعتكف).

(⌐ ق)Λ ل / ⌐ (ق Λل).

و هكذا إذا أردنا أن نؤلف قضايا أكثر تعقيدا من قضايا بعضها مركب، استعملنا الأقواس لنحدد مجال الربط المقصود، دون ترك إمكانية لأكثر من تأويل واحد.

[34] عادل فاخوري ، مرجع سابق ، ص26.

ثمّ إنّ تراكم الأقواس الهلالين ( ) عند استعمالها لوحدها في القضايا أو الدوال قد يسيء إلى الوضوح ويدخل التشويش كما في الصور التالية:

(((ق∧ ل)⟵(مV(¬ ل))) ∧ (¬(ق))⟵ (¬م).

ولهذا يجب علينا الاعتماد على التنويع في الأقواس مع الاتفاق على أن مدى الضم والحصر هو أقصر للسلب (¬) منه لغيره، ويليه الوصل والفصل(V،∧) وأخيرا الاستلزام والتشارط (⟵) (↔) .

والأقواس هي الهلالان ( ) للمجموعة الأضعف ثم المعقفات أو قل العارضتان [ ] ثم تليها الحاضنات { }[35].

5.2- تصنيف الصور[36]

في منطق القضايا يقال عن الصور أنها صحيحة ≠ (فاسدة ، باطلة). فقط إذا صدقت عند كل إسناد من القيم إلى المتغيرات الداخلة في تركيبها ،أو قل إذا كانت القيمة التي تأخذها الصورة في كل سطر من سطور جداول الصدق هي صادقة (ص) ، مهما اختلفت قيم المتغيرات طبقا لهذا التعريف تكون مثلا الصورة.

(ق∧ل)⟵ م صحيحة كما نقرأ ذلك من جدولها :

(ق	∧	ل)	⟵	م
ص	ص	ص	ص	ص
ص	ص	ص	ص	ص
ص	ك	ك	ص	ك
ص	ك	ك	ص	ك
ك	ك	ص	ص	ص
ك	ك	ص	ص	ص
ك	ك	ك	ص	ك
ك	ك	ك	ص	ك
1	3	2	5 —	4

[35] Laurence Bouquiaux et Bruno Leclercq, Logique formelle et argumentation, op.cit.p28.

[36] عادل فاخوري، مرجع سابق ،ص 38.

إذا لاحظنا الخانة رقم 5 فإننا نلاحظ أنها الاستلزام صحيح في كل الحالات فنقول على دالتنا أنها صحيحة. فهذه الصورة ونظائرها من الصور الصحيحة نطلق عليها في منطق القضايا باسم تحصيل الحاصل أو قل الهيهيات tautologie[37] .

أما الصورة التي يوجد لها إسناد من القيم يجعلها كاذبة أي تلك التي تحتمل الكذب (ك) مرة واحدة على الأقل فتسمى صورة فاسدة. والصورة الفاسدة إن كانت دائمة الكذب سميت "صورة متناقضة" وإن كانت تحتمل حالة من الصدق واحدة على الأقل سميت عارضة. انظر المثال التالي:

ق	v	(ل	∧	¬م)
ص	ص	ص	ك	ك
ص	ص	ص	ص	ص
ص	ص	ك	ك	ك
ص	ص	ك	ك	ص
ك	ك	ص	ك	ك
ك	ص	ص	ص	ص
ك	ك	ك	ك	ك
ك	ك	ك	ك	ص
1	5	2	4	3

عند النظر إلى القائمة أو الخانة رقم 5 فإننا نلاحظ وجود حالات تكون فيها الدالة كاذبة فنقول أن الصورة فاسدة وهي صورة عارضة.

[37] المرجع نفسه، ص38.

الجدول:

دائما ص	أحيانا"ص" وأحيانا "ك"	دائما "ك"
صحيحة	فاسدة عارضة	فاسدة متناقضة

تمارين:

صنف صور القضايا التالية إلى صحيحة و متناقضة وعارضة:

1/ ⌐ ق => (ق ← ل).

2/ ق V ل => ق.

3/ { [(ق∧ ل) V (⌐ ل∧ م)] V (⌐ ق∧ ل)} V (⌐ ل ∧ ⌐م).

4/ (ق ← ⌐ ل) ∧ ⌐ (⌐ ق V ⌐ ل)

5/ [(ق ← ل)∧ (ل ← م)] ∧ (⌐ م ← ⌐ ق).

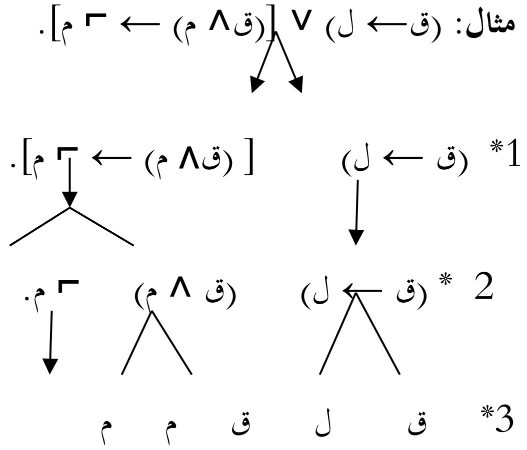
6/ {[(ق ← ل) ∧ (م← ن)] ∧ (قV م)} ← (لV ن).

7/ ⌐ [(ق => ل) ∧ م] V [(⌐ قV م) ∧ ل].

6.2– شجرة الصيغة[38]: إن قواعد بناء الصيغ تحدد كيفية بناء الصيغ من المتغيرات القضيوية ولهذا نستطيع بناء شجرة لكل صيغة رمزية انطلاقا من هذه المتغيرات القضيوية،

[38] أسعد الجنابي ، المنطق الرمزي المعاصر ، دار الشروق ، عمان ، ط 1 ، 2007، ص40.

مثال: (ق← ل) ∨ [(ق∧ م) ← ┐ م].



7.2- جدول الصدق المختصر(قائمة الصدق المختصرة)[39]

تفاديا لجداول الصدق المطولة ذات المتغيرات الكثيرة أُبتكرت طريقة مختصرة لمعرفة قيم صدق دالة ما. فلو كان لدينا مثلا الدالة التالية:[(ق← ل)← ل] ← ق. وأردنا أن نرى ما يتطلبه جدول الصدق الذي عرفناه سابقا حتى نبرهن على صحة الاستدلال أو عدم صحته لوجدنا أنّ :

ق	ل	[(ق	←	ل)	∧	ل]	←	ق
ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص
ص	ك	ص	ك	ك	ك	ك	ص	ص
ك	ص	ك	ص	ص	ص	ص	ك	ك
ك	ك	ك	ص	ك	ك	ك	ص	ك
1	2	3	5	4	6	7	9	8

من الواضح أن دالة القضية فاسدة وليست صحيحة لأنها غير صادقة في كل الحالات بل تكذب في بعضها و هو ما نلاحظه من الخانة 9 ، والواقع أننا لكي نثبت صحة مثل هذه الدالة أو عدم صحتها فإننا نتغاضى عن الحالات الصادقة مهما كانت قيمة صدق المقدم، ونقصر جهودنا على تلك الحالات التي يكون فيها التالي كاذبا، فإذا وجدنا أن كذب التالي لا يتسق مع المقدم كانت الدالة صحيحة ، وإذا كان كذبه متسقا مع صحة المقدم كانت الدالة كاذبة.

[39] محمد مهران ، مرجع سابق ص138

ويمكن شرح هذه العملية على طريقتين:

الطريقة الأولى[40]: لجدول الصدق المختصر ونضع فيه الخطوات التالية:

1 / نضع دالتنا هكذا: [(ق← ل)∧ ل] ← (ق).

2 / نفترض أن النتيجة كاذبة ونضع ذلك على الوجه التالي:

[(ق← ل)∧ ل] ← (ق).

ك

1

3/ نضع في المقدمات قيما مناسبة للمتغيرات المناظرة للمتغيرات الواردة في النتيجة فنلاحظ هنا أن النتيجة **ق** كاذبة، فيجب أن تكون **ق** كاذبة أيضا في المقدمات وعلى ذلك تكون خطواتنا التالية على الوجه التالي:

[(ق← ل)∧ ل] ← ق

ك ك

2

ورقم 2 الذي وضعناه تحت **ق** يعني أن هذه هي ثاني خطوة لنا بعد أن قمنا بإعداد حجتنا للتثبت من صحتها أو فسادها.

4* لنحاول الآن نضع قيما لتعبئة مكونات الدالة على وجه تكون معه هذه القيم صادقة – إذا أمكن ذلك – وإذا قمنا بهذه المحاولة على مثالنا، للاحظنا أن المقدمات (ق ← ل) ∧ ل هي دالة وصيلة (∧)، و لكي تكون هذه الدالة الوصيلة صادقة يجب أن تكون كل من المعطوفين صادقا ، وعلى ذلك لابد أن تكون **ل** التي تمثل

40 المرجع نفسه ، ص140.

احد المعطوفين صادقة ،وبالتالي تكون **ل** التي تمثل التالي في الدالة اللزومية التي تمثل المعطوف الآخر (ق => ل) صادقة بالمثل، وبذلك يكون العطف صادقا ولإظهار ذلك في قائمتنا المختصرة نكتبه على الوجه التالي:

[(ق ← ل) ∧ ل] ← ق.

ك ص ص ص ك.

2 4 3 5 1

5* إذا أمكننا أن نجعل جميع المقدمات صادقة كانت الحجة التي تمثلها دالتنا الأصلية فاسدة الصورة، وإذا لم يكن في استطاعتنا أن نجعلها صادقة كانت حجتنا صحيحة، والسبب في ذلك أن دالتنا لزومية، يمثل المقدم فيها مقدمات الحجة والتالي نتيجة الحجة . وقد فرضنا جدلا كذب النتيجة (التالي)، فإذا صدقت المقدمات هنا (وهي المقدم) لكان معنى ذلك أن المقدم في الدالة اللزومية صادقا والتالي فيها كاذبا، وهذه هي الحالة الوحيدة التي تكذب فيها الدالة اللزومية وبذلك تكون الدالة فاسدة.

ولنكمل الآن قائمتنا المختصرة لنرى قيمة صدق المعطوف الأول في المقدمات وستكون الوجه التالي:

[(ق ← ل) ∧ ل] ← ق.

ك ص ص ص ص ك ك.

2 4 6 3 5 7 1

وهنا نلاحظ أن جميع مقدمات الحجة صادقة، بينما نتيجتها كاذبة، أعني ان المقدم في الدالة اللزومية صادقا، والتالي فيها كاذبا، وعلى ذلك تكون حجتنا السابقة فاسدة، إذ لا تصح الحجة من الصور التالية:

[(ق ← ل) ∧ ل] ← ق.

ص ك.

المقدم التالي.

*ولكن لو فرضنا أن المقدمات جاءت كاذبة مع افتراض كذب النتيجة لكان معنى ذلك أن كذب التالي يؤدي إلى كذب المقدم، أوأن كذب التالي لا يتسق مع صدق المقدمات ، وبالتالي تكون الدالة صادقة أو تكون حجتنا صحيحة.

تلخيص الخطوات في الطريقة الأولى:

1* وضع قيمة الكذب تحت النتيجة.

2* وضع قيما مناسبة للمتغيرات في النتيجة.

3* وضع قيما لبقية المتغيرات والمكونات في الدالة محاولا – إذا أمكن – أن تكون جميعها صادقة.

4* إذا أمكنك أن تجعل جميع مقدمات الدالة صادقة، لكانت حجتنا فاسدة الصورة، وإذا لم يكن ذلك ممكنا كانت الحجة صحيحة الصورة.

***الطريقة الثانية**[41]:

1* نضع الدالة على النحو التالي: [(ق ← ل) ∧ ل] ← ق.

2* ثمّ نضع بعد ذلك قيمة الكذب تحت الثابت الأساسي في الدالة أعني تحت الثابت الذي يكون مجاله أوسع المجالات في الدالة:

(ق ← ل) ∧ ل ← ق وفي هذه الحالة تكون الدالة اللزومية كاذبة.

ك

1

3* من المعروف أن الدالة اللزومية لا تكون كاذبة إلا في حالة واحدة فقط وهي حينما يكون المقدم صادقا والتالي كذبا. فلنبين ذلك في قائمتنا على الوجه التالي:

41 المرجع نفسه ، ص148.

[(ق ← ل) ∧ ل] ← ق.
ص ك ك.
2 1 3

4* ولكي يكون المقدم في دالتنا صادقا (و المقدم هنا دالة وصلية- عطفية) فلا بد أن يكون كل من المعطوفين صادقا. ولنوضح ذلك في القائمة:

المقدم التالي.

[(ق ← ل) ∧ ل] ← ق.
ك ص ص ص ص ك ك.
4 5 7 2 6 1 3

5* وتكون خطواتنا التالية بعد ذلك هي أن نعرف متى يكون كل من المعطوفين صادقا ، وهنا نلاحظ أن المعطوف الثاني يتمثل في متغير وحيد **ل** وبالتالي لا ينشأ عن ذلك أية صعوبات ،وهو هنا يجب أن يكون صادقا لكي يكون العطف صادقا. أما المعطوف الأول وهو (ق← ل) فيكون صادقا في الحالات التالية:

1- **ق**، **ل** صادقتان.
2- **ق** (كاذبة) و **ل**(صادقة).
3- وكل من **ق** و **ل** كاذبتان.

ومن الواضح أن الحالة الأولى **ق** (صادقة) مرفوضة لأنه يجب أن تكون كاذبة لأنها مماثلة للنتيجة التي سبق لنا وأن وصفناها بالكذب ، والحالة الثانية مرفوضة بالمثل لأنها تفترض كذب **ل** ، وهي هنا صادقة لأنها مماثلة للمعطوف الثاني **ل** الذي سبق لنا وصفه بالصدق ،وعلى ذلك تكون الحالة الثانية هي الاحتمال الوحيد لصدق المعطوف الأول وهي تلك الحالة التي تكون فيها المقدم كاذبا والتالي صادقا ، وعلى ذلك تكون قائمتنا في صورتها النهائية على الوجه السابق أعلاه:

[(ق ← ل) ∧ ل] ← ق.
ك ص ص ص ص ك ك

6* نلاحظ هنا أن هذا الجدول يجسد لنا خطأ الدالة لأن المقدم صادق والتالي كاذب. وهكذا أثبتنا فساد الحجة السابقة بطريقة جدول الصدق المختصر.

مثال آخر: [(ق ← ل) ∧ ق] ← ل.

ق	ل	[(ق ← ل) ∧ ق] ← ل				
ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص
ص	ك	ك	ك	ص	ص	ك
ك	ص	ص	ك	ك	ص	ص
ك	ك	ص	ك	ك	ص	ك
1	2	3	5	4	7	6

حجتنا صادقة في كل الحالات وهي بالتالي صحيحة غير فاسدة ، وتسمى في هذه الحالة بالدالة التكرارية أو قل تحصيل الحاصل la tautologie فلنبرهن على صحتها بالطريقة المختصرة:

المقدم   التالي

[(ق => ل) ∧ ق] => ل

ص ص ك ص ص ك   ك

5 4 3 2 4   1

نلاحظ عدم اتساق بين 4 و 5 و 3 وهو ما يؤدي إلى توقف عملية البرهنة، أي أنّنا لم نستطع أن نثبت أنّ الدالة كاذبة مرة واحدة على الأقل و عليه تكون هذه الدالة صحيحة الصورة.

الشجيرات

مفاهيم:

(1) نقول عن فرع branche من شجرتنا أنه مُغلق عندما نجد على طول هذا الفرع الصيغة (س) و نفيها (¬ س) ،نمثل الفرع المغلق بإضافة علامة (×) تحت الفرع ومنه نجد هذا التناقض أي وجود صيغة (س) ونقيضها (¬ س) على نفس الفرع

وعندما يكون هذا الفرع مغلقا ،لانكتب تحت هذا الفرع شيئا آخر

يبدأ الفرع من الأعلى نزولا نحو الأسفل

(2) نقول عن فرع من فروع شجرتنا أنه مفتوح عندما لا يكون مغلقا

(3) عندما نتناول جنيع الصيغ الجزئية لشجرتنا ،وكان أحد فروع الشجرة مفتوحًا عندها يكون لدينا وسيلة لجعل الصيغة التي انطلقت منه في الأعلى لِأَنْ تكون صحِيحَة وعليه نقول عن صيغتنا الأصلية التي نريد البرهنة على صحتها أنها فاسدة.

(4) عندما تكون جميع الفروع (فروع الشجرة) مغلقة ،يعني ذلك أننا لم نجد طريقا لجعل الصيغة التي انطاقنا منها في الأعلى لأن تكون صحيحة أي هي فاسدة وبالتالي تكون صيغتنا الأصلية هي بالضرورة صحيحة الصورة أي تكرارية.

(5) هناك طريقان لبناء الشجرة :

(أ) بوضع خط مستقيم une pile [هكذا |] ويكون ذلك لدينا شرط الحقيقة في الصيغة التي بين أيدينا عبارة عن (∧) conjonction

(ب) بوضع تفريع une branche [هكذا \ /] ويكون ذلك عندما يكون لدينا (∨)

(2) قواعد بناء الشجيرات:

(1) قاعدة (∨) التفريع :عندما يكون الثابت الأساسي للصيغة التي بين أيدينا هو عبارة عن (∨) ،على الشكل التالي : (س ∨ ع) [حيث س و ع صيغتان]

فإننا في سياق (مسار) هذه الشجرة ،فإننا نكتب تحت كل فرع أين تظهر صيغة الصورة التالية :

س ∨ ع

/ \   / \

ع   س   ع   س

(2) قاعدة (¬∨) : الخط المستقيم النازل [|] : عندما يكون الثابت الأساسي لصيغتنا هو (¬∨) على الشكل التالي ¬ (س ∨ ع) فإننا في مسار هذه الشجيرة ،نكتب تحت كل فرع حيث تظهر هذه الصيغة:

¬ (س ∨ ع)

|

¬ س

|

¬ع

(3) قاعدة (¬ ∧) عندما يكون لدينا الصيغة التالية ¬ (س ∧ ع)

فإننا نكتب تحت كل فرع الصورة التالية :

¬ (س ∧ ع)

/ \

¬ع ¬س

(4) قاعدة (∧) : عندما تكون صيغتنا على الشكل التالي (س ∧ ع) فإننا نكتب تحت كل فرع الصورة التالية:

(س ∧ ع)

|

س

|

ع

(5) قاعدة (←) : (س ← ع) فإننا نكتب تحت كل فرع الصورة التالية:

(س ← ع)

/ \

ع ¬ س

(6)قاعدة (¬ ←) : ¬ (س ← ع) ،فإننا نكتب تحت كل فرع الصورة التالية :

¬ (س ← ع)

|

س

|

¬ ع

(7) قاعدة (↔) أي صيغتنا تكون على الشكل التالي :

(س ↔ ع) ففي هذه الحالة نكتب تحت كل فرع الصورة التالية:

(س ↔ ع)
\ /
س ¬س
| |
ع ¬ع

(8) قاعدة (¬ ↔) : ¬ (س ↔ ع) ، ففي هذه الحالة نكتب تحت كل فرع الصورة التالية:

¬ (س ↔ ع)
\ /
س ¬س
| |
¬ع ع

(9) قاعدة (¬ ¬) (الخط المستقيم النازل)

(¬ ¬ س) فإننا نكتب التفريع على الشكل التالي:

¬ ¬ س
|
س

طريقة البرهان بالشجيرات :

قواعد الوصل :

¬¬ ق	(ق ∧ ل)	¬(ق ∨ ل)	¬(ق → ل)
ق	ق ل	¬ ق ¬ ل	ق ¬ل

المنطق الرياضي

قواعد الفصل :

¬ (ق∧ل)	(ق ∨ ل)	(ق ← ل)	(ق ↔ ل)	¬(ق↔ل)
/ \ ¬ق ¬ل	/ \ ق ل	/ \ ¬ق ل	/\ ق ¬ق ل ¬ل	/\ ق ¬ق ¬ل ل

{[(ق ← ل) ∧ (ق ← م)] ← [ق ← (ل ∧ م)]}

حتى نعلم إذا كانت صحيحة نبحث في تحقيق في نفيها أو اثبات نفيها .

¬{[(ق ← ل) ∧ (ق ← ل)] ← [ق ← (ل ∧ م)]}

لا تحقق هذه الدّالة إلا إذا كان مقدّمها الذي هو [(ق ← ل) ∧ (ق ← م)] يكون صادقا

و إذا كان تاليها [ق ← (ل ∧ م)] كاذبًا والمقدّم لا يكون صادقا إلا إذا كان (ق ← ل) و (ق ← م)

صادقين معًا، والتالي يكون كاذبا إلا إذا كان ق صادقًا و (ل ∧ م) كاذبًا

(ق ← ل) صادقًا إلا إذا كان ¬ ق كاذبًا أو ل صادقًا، و (ق ← م) صادقا و إلا إذا

¬ ق كاذبًا أو م صادقًا

و ¬ (ل ∧ م) صادقًا إذا كان ¬ ل صادقًا أو ¬ م صادقًا

وهذا ما يمكن التعبير عنه وصياغته على الشكل التالي : شكل شجرة:

¬{[(ق ← ل) ∧ (ق ← ل)] ← [ق ← (ل ∧ م)]}

|

1 [(ق ← ل) ∧ (ق ← م)]

|

2 ¬[ق ← (ل ∧ م)]

|

3 (ق ← ل)

|

4 (ق ← م)

|

5 ق

|

6 ⌐ (ل ∧ م)

/ \

7 ⌐ ق ل

×

/ \

8 ⌐ ق م

×

/ \

9 ⌐ ل ⌐ م

× ×

نلاحظ أنه طبقنا قواعد الوصل قبل قواعد الفصل وهذا أفضل.

هذا الجدول يُبيّن لنا أنه لا يوجد نموذج Modéle يمكنه تحقيق الصيغة الأصلية للجدول، ذلك أنه هناك تناقض بين ق و ⌐ ق ، و ل و ⌐ ل ، و م و ⌐ م وهذا ما أشرنا إليه بعلامة (×) التي وضعناها تحت الحرف الذي يحمل القيمة كاذب و صادق في الوقت نفسه .

وفي الحالة التي تكون فيها الحروف (الرموز) مصحوبة بالحرف (×) تحتها نقول في هذه الحالة أن كل الطرق (كل الفروع) مغلقة.

وحتى نحقق الصيغة الابتدائية ،يجب أن نعطي القيمة صادق و كاذبة لنفي الرمز (الحرف) في مرتبتين مختلفتين و في الحالة التي تكون فيها الفروع مفتوحة أي لا توجد رموز متناقضة هنا نقول أننا حققنا الصيغة الابتدائية.

مثال آخر :

(ق ∧ ل) ← (ل ∧ ق)

نضع الدالة على شكل صيغة منفية : ⌐ [(ق ∧ ل) ← (ل ∧ ق)]

⌐ [(ق ∧ ل) ← (ل ∧ ق)] √

|

(ق ∧ ل) √

|

⌐ (ل ∧ ق) √

|

ق

|

ل

/ \

¬ ق   ¬ ل

×   ×

مثال أخر

لدينا الصيغة التالية [(ق ∧ ل) ∨ (¬ ق ∧ م)] ⟵ (ل ∨ م)

نقوم بنفي الصيغة الابتدائية فنحصل على ما يلي :

¬ { [(ق ∧ ل) ∨ (¬ ق ∧ م)] ⟵ (ل ∨ م) } √

|

[(ق ∧ ل) ∨ (¬ ق ∧ م)] √

|

¬ (ل ∨ م) √

|

¬ ل

|

¬ م

/ \

(ق ∧ ل)   (¬ ق ∧ م) √

| |

ق   ¬ ق

| |

ل   م

(×)   (×)

و الدالة تكرارية – صحيحة الصورة

مثال أخر

لدينا الصيغة ق ∨ (ل ∧ ¬ م)

¬ [ق ∨ (ل ∧ ¬ م) √

|

¬ ق

|

¬ (ل ∧ ¬ م) √

/ \

¬ م ¬ ¬ √ ¬ ل

| 0

م

0

فروع الشجرة مفتوحة وعليه، تكون الدالة فاسدة الصورة .

مثال أخر

ق ∧ (¬ ق ∨ ل)

¬ [ق ∧ (¬ ق ∨ ل)] √

/ \

¬ ق ¬ (¬ ق ∨ ل) √

0 |

¬ ¬ ق √

|

ق

|

¬ ل

0

الدالة فاسدة الصورة

مثال أخر

[¬ (ق ∧ ل) ∨ (ق ∧ ل)]

¬[¬(ق ∧ ل) ∨ (ق ∧ ل)] √

|

¬ ¬ (ق ∧ ل)

|

(ق ∧ ل)

|

ق

|

¬ (ق ∧ ل)

/ \

¬ ق   ¬ ل

×   ×

الفروع مغلقة جميعها و بالتالي الدالة صحيحة الصورة– تكرارية

مثال أخر

[(ق ← ل) ∧ ق] ← ل

¬ { [(ق ← ل) ∧ ق] ← ل } √

|

[(ق ← ل) ∧ ق] √

|

¬ ل

|

(ق ← ل) √

|

ق

/ \

¬ ق   ل

×   ×

الدالة صحيحة الصورة

[(ق ← ل) ∧ (¬ل ← ¬ق)] ↔ (¬ق ∨ ل)

¬ { [(ق ← ل) ∧ (¬ل ← ¬ق)] ↔ (¬ق ∨ ل) }

/ \

/ \

[(ق ← ل) ∧ (¬ل ← ¬ق)]   ¬[(ق ← ل) ∧ (¬ل ← ¬ق)]

| |

¬(¬ق ∨ ل)   (¬ق ∨ ل)

| / \

(ق ← ل)   ¬ق   ل

/ \   / \

(¬ل ← ¬ق)   ¬(ق ← ل)   ¬(¬ل ← ¬ق)   / \

¬¬ق   ق   ¬ل   / \

ق   ¬ل   ¬¬ق   / \

¬ل   ×   ق   / \

¬ق   ل   ×

×   ×   / \

¬(ق ← ل)   ¬(¬ل ← ¬ق)

ق   ¬ل

¬ل   ¬¬ق

×   ق

×

8.2- العلاقات بين دوال الصدق[42]

إن دوال الصدق الرئيسية ليست مستقلة عن بعضها البعض الآخر بل يمكن تعريف بعضها عن طريق البعض؛ والمقصود بالتعريف هنا هو النوع التحليلي وليس اللفظي ،أي أن يكون للشيء المعرّف وتعريفه المعنى نفسه، ولكن مع اختلاف الصيغة الرمزية . وعادة ما يتم التعبير عن التعريف بوضع علامة التساوي (=) بحيث يوضع الشيء المعرّف على يمين الإشارة (=) وتعريفه على يسارها. مع وضع لفظ تعريف في أقصى اليسار حتى لا تختلط علامة التساوي الدالة على التعريف بعلامة التساوي الدالة على الهوية ، وبذلك يكون شكل التعريف على الوجه التالي:

.... = ... تعريف

وتعريفنا لهذه الدوال بعضها عن طريق البعض الآخر هو تعريف الثوابت المنطقية، لأن المتغيرات واحدة في جميع الدوال والثوابت الرئيسية هي أربعة: ¬ ، ∧ ، ∨،→ بالإضافة إلى التكافؤ ↔ .

وجميع هذه الثوابت قابلة للتعريف فيما عدا النفي(¬) الذي لابد من أخذه من دون تعريف، وذلك لأنه لا يقبل التعريف عن طريق أي ثابت أو أكثر من الثوابت الأخرى ولذلك يسمى أحيانا باسم **الثابت الأول** أو باسم **الفكرة الأولية** ؛ أما الثوابت الثلاثة الأخرى فهي ثوابت أولية نسبية : بمعنى أننا لو أخذنا أي ثابت منها (∧ ، ∨ ، →) مع النفي (¬) لأمكن تعريف الثابتين الآخرين.

1- تعريف الفصل (∨) عن طريق الوصل (∧)، والنفي (¬):

(ق∨ ل)= ¬ (¬ ق ∧ ¬ ل) تعريف.

والعلاقة بين الفصل والوصل (∨، ∧) تتضح بالمثال التالي:

[42] محمد مهران، مقدمة في المنطق الرمزي ، مرجع سابق، ص 84- 89.

الليلة ،إما أن أذهب إلى السينما أو إلى المسرح.

يعني من الناحية المنطقية أنه لابد أن يذهب إلى أحد الجهتين المسرح أو السينما مع احتمال أن يذهب إلى الاثنين في نفس الليلة، فيذهب إلى السينما في بداية الليل ثم إلى المسرح في آخره: ومعنى ذلك انه إذا ذهب إلى السينما فقط لكان صادقا في قوله ، ولو ذهب إلى المسرح فقط لكان صادقا كذلك ، والاحتمال الوحيد الذي لا يتفق مع مثالنا السابق ويجعله كاذبا هو: (عدم الذهاب لا إلى السينما ولا إلى المسرح).

فلو رمزنا إلى "الذهاب إلى السينما" بالرمز **ق** وإلى االذهاب إلى المسرح بالرمز **ل** لكانت صورة هذا الاحتمال الأخير على الوجه التالي: ¬ ق ∧ ¬ ل:

ومن الواضح أن نقيض هذا هو ما يقصده القائل أي أنه يرفض القول بأنه لا يذهب إلى السينما ولا إلى المسرح بل لا بد أن يذهب إلى أحدهما على الأقل وبالتالي نقيض الصورة السابقة (¬ ق ∧ ¬ ل) هي: ¬ (¬ ق∧ ¬ ل) وتعني باللغة القضيوية:" من الخطأ القول بأني سوف لا أذهب إلى أي من الجهتين" ، وهذا يعني أنه سوف يذهب إلى أحد الجهتين على الأقل وصورة هذا المعنى الأخير هي الصورة الانفصالية ق V ل وهي تعني ما تعنيه الصورة السابقة عليها ¬ (¬ ق ∧ ¬ ل).

وبذلك يكون لدينا التعريف التالي:

ق V ل = (¬ ق∧ ¬ ل) تعريف.

2- تعريف الوصل عن طريق الفصل والنفي:

(ق ∧ ل) = ¬ (¬ ق V ¬ ل) تعريف

ولنوضح ذلك ننظر في المثال الآتي:

قال أحد الأشخاص لصديق له يعرفه جيدا :"" اشتريت، أمس ، قميصا وحذاء" وصديقه هذا يعرف أنه لا يملك مالا لشراء هذين الغرضين معا بل ربما لا يمكنه أن يشتري غرضا واحدا، وهذا يعني من وجهة نظر صديقه هو أنه لا يستطيع أن يشتري الغرضين بل إنه لم يستطع شراء أحد الغرضين على الأقل أي أنه لم يشتري القميص أو لم يشتري الحذاء وصورة ذلك هي: (¬ ق ∨ ¬ل).

ولكنه أنكر على زميله وقال له بأن زعمه هذا خطأ : " من الخطأ القول بأني لم اشتري القميص أو الحذاء ". وهذا بمثابة التمسك بقوله وعلى ذلك يكون إنكارا (¬ ق ∨ ¬ل) مساويا لإثبات (ق ∧ ل) وبذلك يكون لدينا التعريف التالي:

(ق ∧ ل) = ¬ (¬ ق ∨ ¬ ل). تعريف.

3- تعريف اللزوم عن طريق الانفصال والنفي:

(ق ← ل) = (¬ ق ∨ ل) تعريف.

ونوضح ذلك بمثال قول القائل: "إذا ذهبت إلى السوق لأشتريت قميصا".

لكان معنى ذلك أن ذهابه إلى السوق لا بد وأن يترتب عليه شراء القميص وعليه، فإذا لم يكن يريد شراء القميص فلا يجب أن يذهب إلى السوق وإلا لاشتراه في حالة ما ذهب إلى السوق. ومعنى ذلك أيضا أن هناك حالتين اثنتين أمام قائلنا هما:

ـــ إما ألا يذهب إلى السوق (إذا لم يكن يريد شراء القميص).

ـــ أو لابد من شراء القميص (إذا ما ذهب إلى السوق).

وصورتها : ¬ ق V ل.

وهذه الصورة الفصلية تقرر صراحة أنه إذا ما ذهب قائلنا إلى السوق لا بد له أن يشتري القميص لأنها تقول : إما ألا تذهب ، وإما أن تشتري القميص، وهذه القضية الفصلية تعني نفس القضية اللزومية وبالتالي يكون لدينا التعريف التالي:

(ق ← ل) = (¬ ق V ل) تعريف.

4- تعريف الفصل عن طريق اللزوم والنفي:

(ق V ل) = (¬ ق ← ل) تعريف.

إذا قال أحدهم: "إما أن تتحقق العدالة في المجتمع أو أن يعيش المواطنون تعساء " ، لكان معنى ذلك أن أمام المجتمع أحد الطرقين: إما أن تتحقق العدالة بين المواطنين أو أن يعيش المواطنون تعساء. (في حالة عدم تحقيق العدالة) وهذا يعني : إذا لم تتحقق العدالة لعاش المواطنون تعساء.

وصورتها: (¬ ق => ل) وتكون هذه الصيغة مساوية للصيغة الأولى (إما – أو) أي (قV ل) وعليه يكون التعريف التالي:

(ق V ل) = (¬ ق ← ل) تعريف

5- تعريف الوصل عن طريق اللزوم والنفي:

(ق Λ ل)= ¬ (ق ← ¬ ل) تعريف.

ولشرح هذا التعريف نعود إلى مثالنا الذي قررت فيه "أنك اشتريت قميصا وحذاء" على الرغم من إنكار صديقك. فإنكار الصديق لقولك: اشتريت القميص والحذاء (ق ∧ ل)، يعني أنك إذا استطعت أن تشتري القميص لعجزت عن شراء الحذاء فإذا حدث واشتريت القميص لترتب على ذلك عدم شرائك للحذاء أي (**ق** يترتب عليه ليس **ل**) ، و بعبارة رمزية (ق← ⌐ل) .

ولكن لنفترض أنّك أنكرت على صديقك هذا الزعم وقلت له: " إن قولك بأن شراء القميص لزم (←) عنه عدم (⌐) شرائي للحذاء "هو قول خاطئ أي: ⌐ (ق ← ⌐ ل) ومعنى ذلك أنك استطعت أن تشتري الغرضين معا وبذلك يكون لدينا التعريف التالي:

(ق ∧ ل) = ⌐ (ق← ⌐ ل) تعريف.

6- تعريف اللزوم عن طريق الوصل و النفي:

(ق ← ل) = ⌐ (ق ∧ ⌐ ل) تعريف

ولشرح هذا التعريف لننظر في المثال التالي:

"إذا تحققت العدالة في المجتمع لعاش المواطنون سعداء " وصورته الرمزية (ق← ل).

فهذا القول يربط بين تحقيق العدالة وسعادة المواطنين، بحيث لا يمكن أن تتحقق العدالة دون أن يعيش المواطنون سعداء.

فإذا جاء أحدهم وزعم أن العدالة قد تحققت ولا يعيش المواطنون سعداء أي بتعبير صوري (ق∧⌐ ل).

وهذا يعني أن زعمه باطلا، ذلك لأنّ تحقق العدالة تجلب السعادة أي: ⌐ (ق ∧ ⌐ ل). وهو نفس ما تعنيه مقولة إذا تحققت العدالة لعاش المواطنون سعداء(ق←ل)

وبذلك يكون التعريف كالآتي:

(ق ← ل) = ¬ (ق ∧ ¬ ل) تعريف.

ملاحظات عامة:

1/ إن النفي (¬) يشترك في جميع التعريفات وهو في حد ذاته غير قابل للتعريف وعليه يكون النفي (¬) هو الثابت المطلق أو قل الفكرة الأولية على الإطلاق.

2/ في كل تعريف قد آخذنا ثابتا آخر بجانب النفي ليكون أوليا نسبيا وبالتالي كل التعريفات تتم عن طريق النفي وثابت آخر معه.

3/ إن التعريفات المتبادلة بين الدوال هي تعريفات متناظرة.

أ/ الوصل والفصل:

1/ (ق ∨ ل) = ¬(¬ ق ∧ ¬ ل) تعريف. متناظر مع

2/ (ق ∧ ل) = ¬ (¬ ق∨ ¬ ل) تعريف.

ب/ الوصل واللزوم:

5/ (ق ∧ ل) = ¬ (ق ← ¬ ل) تعريف.

6/ (ق ← ل) = ¬ (ق ∧ ¬ ل) تعريف.

ج ** **الفصل واللزوم:**

4/ (ق V ل) = (⌐ ق ← ل)   تعريف.   متناظر مع

3/ (ق ← ل)   (⌐ ق V ل)   تعريف.

د/ لكل دالة من دوالنا الرئيسية يكون لديها تعريفين اثنين :

- (قV ل) = ⌐(⌐ ق Λ ⌐ ل) = (⌐ ق ← ل).

- (ق Λ ل) = ⌐ (⌐ ق V ⌐ ل) = ⌐ (ق ← ⌐ ل).

- (ق ← ل) = ⌐ (ق Λ ⌐ ل) = (⌐ ق V ل).

مما سبق يتبين لنا أنّ هذه هي دوالنا الرئيسية والعلاقات الكائنة بينها عن طريق التعريف وتشكل هذه الدوال المادة الرئيسية لحساب القضايا، إذ أن الدوال الأخرى المركبة – بما في ذلك دالة التكافؤ – إنّما تتألف أساسا من هذه الدوال كما نلاحظ فيما بعد.

(ق↔ ل) =[(ق Λ ل) V (⌐ ق Λ ⌐ ل)]   تعريف

(إما **ق** و **ل**)   (أو نفي **ق** ونفي **ل**)

ويقوم هذا التعريف على أساس الفصل والوصل بالإضافة إلى النفي: وهو ما قلناه عن التكافؤ أي لابد أن تكون القضيتان إما صادقتين معا أو كاذبتين معا.

وتكون الدالتان أو القضيتان متكافئتين إذا كانت كل منهما تلزم عن الأخرى أي متشارطتان.

(ق ↔ ل) = (ق← ل) Λ (ل ← ق)   تعريف

وهو تعريف يقوم على أساس الوصل واللزوم.

قانونا دومرغان[43] les deux lois de De Morgane :

وهما قانونان ينطبقان على الوصل والفصل فقط ، أي علاقة الانفصال بالعطف وأُطلق عليها اسم دومرغان الذي وضع بعض القوانين المشابهة في حساب الفئات.

وقبل شرح هذين القانونين نقول أن جميع التعريفات التي ذكرناها من قبل إنما تقرر أيضا تكافؤات ذلك لأن التعريف التحليلي بمعني أن للمعرف وتعريفه المعنى نفسه وهذا يعني أيضا أنه إذا كان المعرّف صادقا كان تعريفه صادقا بالمثل وإذا كان كاذبا كان تعريفه كاذبا، بمعنى آخر أنّ المعرّف وتعريفه يشتركان في قيمة الصدق ،وهذا هو أساس التكافؤ وعلى ذلك نستطيع أن نستعيض في التعريفات السابقة عن علامة التساوي = بعلامة التكافؤ (↔) وعليه نستطيع أن نعبر عن التعريفين المتبادلين للوصل والفصل على الوجه التالي:

(ق V ل) ↔ ⌐ (⌐ ق Λ ⌐ ل).

(ق Λ ل)↔ ⌐ (⌐ ق V ⌐ ل).

ولنأخذ الآن التكافؤ الأول وهو:

(ق V ل) ↔ ⌐ (⌐ ق Λ ⌐ ل) وهو يقرر أن الدالة الانفصالية تكافئ دالة وصلية منفية ذات متغيرين **ق**، **ل** ولكن لو فرضنا أن أمامنا الدالة الانفصالية التالية:

⌐(ق V ل) .وهي منفية فلا بد من نفي الدالة ⌐ (⌐ ق Λ ⌐ ل) وهي الدالة المكافئة للفصل (ق V ل) فنحصل على التكافؤ التالي:

⌐(ق V ل) <=> ⌐ [⌐(⌐ ق Λ ⌐ ل)].

ولما كان نفي النفي إثباتا فإن التكافؤ يمكن التعبير عنه على الوجه التالي:

⌐ (ق V ل) ↔ (⌐ ق Λ ⌐ ل).

[43] المرجع نفسه ، ص 92-100

ونلاحظ هنا أن الانفصال المنفي أصبح مكافئا للوصل الذي يكون متغيراه منفيين ويمكن أن نصوغه في صورة قانون عام كما يلي:

*الانفصال المنفي يكون مكافئا لوصل منفي المتغيرين.

وكذلك يقال عن التكافؤ الثاني هو : (ق ∧ ل) ↔ ¬ (¬ ق ∨ ¬ل). ومعناه أن الوصل يكافئ انفصالا منفيا تكون حجتاه أو قل متغيراه منفيين ولكن لو كان أمامنا الدالة التالية وهي نفي الدالة السابقة: ¬ (ق ∧ ل) لكانت الدالة الفصلية المكافئة لها هي:

¬ [¬ (¬ ق ∧ ل)] ونفي النفي هو إثبات فتصبح الفصلية على الصورة التالية (¬ ق ∨ ¬ ل) وبذلك نستطيع أن نضع التكافؤ على الشكل التالي: ¬(ق ∧ ل) <=> (¬ق∨¬ل) ويمكننا أن نعبر عن ذلك على هيئة قانون عام على الوجه التالي:

*العطف المنفي يكون مكافئا للانفصال منفي الحجتين (المتغيرين).

هذان القانونان هما قانونا دومرغان للتكافؤ بين الوصل والفصل في صورتهما العامة.

وبإمكاننا توسيع تطبيق هذين القانونين بحيث يمتد تطبيقهما إلى دوال وصلية أو فصلية ذات حجج (متغيرات) مركبة وعلى سبيل المثال القول: من الخطأ القول بأني إما أن أذهب إلى المنزل سائرا على قدمي أو أركب الحافلة أو أنتظر سيارة الأجرة.

وهو قول يمكن التعبير عنه في لغتنا الرمزية كما يلي:

¬(ق ∨ ل ∨ م) والانفصال هنا منفي (¬) يمكن أن نطبق عليه القاعدة الأولى من قواعد دومورغان للوصول إلى الدالة الوصلية المكافئة له ، وسيكون لدينا بالطبع عطف جميع حججه أو قل متغيراته المنفية ويصبح مثالنا مكافئا للقول:

" سوف لا أذهب إلى المنزل سائرا على قدماي، ولا راكبا في الحافلة وسوف لا أنتظر سيارة الأجرة " .

أي: (¬ ق ∧ ¬ ل ∧ ¬ م) وبذلك يكون لدينا التكافؤ التالي:

⌐ (ق V ل V م) <=> (⌐ ق ∧ ⌐ ل ∧ ⌐ م).

ولكننا مع ذلك نستطيع أن نحلل الدوال التي تنطوي على أكثر من حجتين (متغيرين) إلى دوال تنطوي على حجتين فقط ولنأخذ الدالة السابقة على سبيل المثال حيث يكون التكافؤ التالي صحيحا.

⌐(ق V ل V م) ↔ ⌐ [(ق V (ل V م)]

فإذا طبقنا القاعدة الأولى من قواعد دومورغان على الدالة الواقعة على يسار علامة التكافؤ وهي دالة فصلية منفية حجتها الأولى **ق** وحجتها الثانية (ل V م)، لوصلنا إلى الدالة الوصلية التالية : [⌐ ق ∧ ⌐ (ل V م)].

وبتطبيق قاعدة دومورغان الأولى مرة أخرى على الحجة السابقة نصل إلى :

(⌐ ق ∧ ⌐ ل ∧ ⌐ م) .

ونصل بذلك إلى نفس التكافؤ الأصلي وهو:

⌐(قV ل V م) <=> (⌐ ق ∧ ⌐ ل ∧ ⌐ م).

وعليه يمكننا تطبيق هذا الإجراء مهما يكن عدد الحجج في الدالة الوصلية أو الفصلية.

لنأخذ أمثلة أخرى حتى نتدرب على هذه الإجراءات.

مثال: ⌐(ق ↔ ل).

نعلم أن (ق ↔ ل) = (ق ∧ ل) V (⌐ ق ∧ ⌐ ل) بالتعريف .

وعليه فإنه بإمكاننا أن نكتب: ⌐ (ق ↔ ل) ↔ ⌐ [(ق ∧ ل) V (⌐ ق ∧ ⌐ ل)].

وتكون أول دالة مكافئة لدالتنا الأصلية : ⌐ (ق ↔ ل) ، هي الدالة (1)

⌐ [(ق ∧ ل) V (⌐ ق ∧ ⌐ ل)].

وهي دالة انفصالية منفية ذات حجتين مركبتين الأولى هي (ق ∧ ل) والثانية (⌐ ق ∧ ⌐ ل).

ومن الواضح أننا نستطيع هنا أن نطبق القاعدة الأولى من قاعدتي دو مورغان لنصل بها إلى دالة وصلية تكون حجتاها منفيتين وتكون متكافئة بالتالي للدالة (1) أي أننا سوف نحول الفصل المنفي إلى وصل مع نفي الحجتين فتكون لدينا الدالة التالية:

الدالة (2): [⌐ (ق ∧ ل) ∧ ⌐ (⌐ ق ∧ ⌐ ل)].

وهذه الدالة الأخيرة عبارة عن دالة وصلية مركبة ذات حجتين ، كل منهما أيضا دالة وصلية منفية وعلى ذلك يمكن تطبيق قاعدة دومورغان الثانية على كل من هاتين الحجتين لنصل إلى ما يكافئهما من دوال فصلية ذات حجتين منفيتين كما تقرر القاعدة ، فتكون الحجة الأولى (⌐ ق∨ ⌐ل) (الوصل المنفي يكون مكافئا للفصل منفي الحجتين و هي القاعدة الثانية).

وتكون الحجة الثانية: [⌐ (⌐ ق) ∨ ⌐ (⌐ل)] "دائما بحسب القاعدة الثانية" ويجب أن نعلم أن نفي النفي هو إثبات فتتحول الحجة الثانية إلى الصورة التالية (ق ∨ ل) وعليه تكون الدالة (2) مكافئة للدالة التالية:

الدالة (**3**): (⌐ ق ∨ ⌐ ل) ∧ (ق ∨ ل).

وهكذا استطعنا أن نصل من دالتنا الأصلية ⌐ (ق ↔ ل) إلى عدة دوال مكافئة لها ، وبالتالي تكون كل منها مكافئة للأخرى وهي هنا ثلاث دوال:

1- ⌐ (ق ↔ ل) ↔ ⌐ [(ق ∧ ل) ∨ (⌐ ق ∧ ⌐ل)].

2- ⌐ (ق ↔ ل) ↔ [⌐ (ق ∧ ل) ∧ ⌐ (⌐ ق ∧ ⌐ ل)].

3- ⌐ (ق ↔ل) ↔ [(⌐ ق ∨ ⌐ ل) ∧ (ق ∨ ل)].

و يمكننا أن نصل إلى دوال أخرى مكافئة للدوال السابقة وذلك من خلال التعريفات الستة السابقة.

فمثلا: أن نضيف إلى ما سبق من تكافؤات تكافؤا آخر بتعريف الحجتين في الدالة الأخيرة عن طريق اللزوم والنفي، أي تعريف كل من(⌐ ق∨ ⌐ ل) و(ق ∨ ل) على أساس اللزوم و النفي فيكون لينا الدالة التالية :

الدالة 4 : (ق ← ⌐ ل) ∧ (⌐ ق ← ل).

(⌐ ق ∨ ⌐ ل) ↔ [⌐ (⌐ ق) ← ⌐ ل] (بالتعريف)

أي (ق ← ⌐ ل)

و (ق ∨ ل) ↔ (⌐ ق ← ل) (بالتعريف)

ثم نعوض فنتحصل على ما يلي :

⌐ (ق ↔ ل) ↔ [(ق ← ⌐ ل) ∧ (⌐ ق ← ل)]

مثال ثاني: لنفترض أن لدينا الدالة التالية: ⌐ (ق ↔ ⌐ ل).

ونريد أن نصل إلى الدوال المكافئة لها فإننا نستطيع أن نحقق ذلك بنفس الطريقة السابقة.

المتغير **ل** هنا منفي عكس ما كانت عليه في التكافؤ السابق فقد كانت القضية مثبتة.

1/ ⌐ (ق ↔ ⌐ ل) ↔ ⌐[(ق ∧ ⌐ ل) ∨ (⌐ ق ∧ ⌐ ⌐ ل)]

↔ ⌐ [(ق ∧ ⌐ ل) v (⌐ ق ∧ ل)].

2/ ⌐ (ق ↔ ⌐ ل) ↔ ⌐ [ق ∧ ⌐ ل) ∧ ⌐ (⌐ ق ∧ ل).

3/ ⌐ (ق ↔ ⌐ ل) ↔ [⌐ ق v ⌐ (⌐ ل)] ∧ [⌐ (⌐ ق) v ⌐ ل].

↔ (⌐ ق ∨ ل) ∧ (ق ∨ ⌐ ل).

4* ⌐ (ق ↔ ⌐ ل) ↔ [(ق ←ل) ∧ (⌐ ق ← ⌐ ل)].

↔ (ق ← ل) ∧ (⌐ ق ← ⌐ ل).

(بالتعريف الفصل والنفي يعطينا الاستلزام)

أفرض أن لدينا الدالة التالية:

(ق ↔ ل) ونريد أن نصل إلى دوال تكافؤها

1/ (ق ↔ ل) ↔ [(ق ← ل) ∧ (ل ← ق)]

فنطبق عليها تعريف الوصل والنفي الناتج عن لزوم:

(ق←ل) ↔ ¬(ق ∧ ¬ ل)

و (ل ← ق) ↔ ¬ (ل ∧ ¬ ق) فينتج لدينا:

2/ (ق ↔ ل) ↔ ¬ [(ق ∧ ¬ ل) ∧ (ل ∧ ¬ ق)]

من التكافؤ (2) الذي هو عبارة عن دالة وصلية كل قضية من قضاياها دالة وصلية منفية فنستطيع هنا أن نطبق القاعدة الثانية من قواعد دومورغان على كل من هاتين القضيتين لتصبح كل منهما دالة انفصالية على الوجه التالي:

¬ (ق ∧ ¬ ل) ∧ ¬ (ل ∧ ¬ ق)

¬(ق∧ ¬ ل) ↔ (¬ ق ∨ ¬ ¬ ل)

↔ (¬ ق ∨ ل)

*¬ (ل ∧ ¬ ق) ↔ (¬ ل ∨ ¬ ¬ ق)

↔ (¬ ل V ق) نعوض في الدالة (2)

3/ ↔ (¬ ق ∨ ل) ∧ (¬ ل ∨ ق)

وعليه تصبح لدينا سلسلة من التكافؤات:

(ق ↔ ل) ↔ (ق← ل) ∧ (ل ← ق).

↔ ¬ (ق ∧ ¬ ل) ∧ ¬ (ل ∧ ¬ ق).

↔ (¬ ق ∨ ل) ∧ (¬ ل ∨ ق).

9.2- بعض الاستدلالات الخاصة بدوال الصدق:

1/ استدلالات قائمة على الدالة المتناقضة: قانون النفي المزدوج loi de la double négation / ¬ (¬ ق) ↔ ق.

وهذا يعني أن كذب (**¬ ق**) تقرير لصدق **ق**

2/ استدلالات قائمة على الدالة اللزومية:

أ- **قاعدة إثبات المقدم modus ponedo penens**[44]: ويطلق عليها أحيانا قاعدة الإثبات بالإثبات أو قاعدة الوضع بالوضع وصورتها:

ق ← ل

ق

إذن ل

وبصورة أخرى: [(ق ← ل) ∧ ق] ← ل

ويمكن أن تُقرأ على الوجه التالي: إذا صدقت ق صدقت ل، وق صادقة إذن ل صادقة . وهنا نلاحظ أن صدق **ق** يعد شرطا كافيا لصدق **ل** أي (صدق المقدم يلزم عنه صدق التالي).

ولكن إذا كان إثبات المقدم يؤدي إلى إثبات التالي، فإن إنكار المقدم لا يؤدي إلى إنكار التالي فإذا قال قائل: " إذا كان هذا الشخص من ذوي الأملاك لكان غنيا، ولكنه ليس من ذوي الملاك، إذن ليس غنيا ".

[44] Laurence Bouquiaux et Bruno Leclercq, Logique formelle et argumentation, op.cit.p46

هذا الاستبدال باطل لأنه قد يكون هذا الشخص غنيا دون أن يكون من ذوي الأملاك. وعليه فإن [(ق ← ل) ∧ ⌐ ق]← ⌐ ل استدلال باطل.

ب– قاعدة إنكار التالي: tollendo tollens modus[45][46]

وتسمى أحيانا قاعدة الرفع وصورتها

ق ← ل أو بصورة أخرى: [(ق ← ل) ∧ ⌐ل] ← ⌐ ق

⌐ ل

إذن : ⌐ ق

فإذا قلنا: إذا ذهبت إلى باريس لرأيت برج إيفل، ولكني لم أر برج إيفل. إذن فأنا لم أذهب إلى باريس.

وهو استدلال صحيح لأن كذب التالي لابد وأن يؤدي إلى كذب المقدم ؛ نلاحظ هنا أيضا أنّه إذا كان كذب التالي يترتب عليه كذب المقدم، فإن صدق هذا التالي لا يترتب عليه صدق المقدم أي أن الاستدلال من الصورة التالية هو استدلال باطل الصورة:

ق ← ل أو [(ق ←ل) ∧ ل] ← ق

ل

إذن ق

ومثاله: إذا ذهبت إلى السوق لاشتريت قميصا ،ولكن اشتريت القميص

إذن لقد ذهبت إلى السوق

[45] Ibid.p46.

فهذا الاستدلال باطل ذلك لأنّني قد أكون اشتريت القميص دون أن أذهب إلى السوق، كأن أكلف أحدهم بشرائه دون أن أذهب.

[(ق ← ل) ∧ ل] ← ق

ك ص ص ص ص ك ك

3 4 6 2 5 7 1

وعليه لا يصح الاستدلال على أساس الصورة السابقة لأن مثل هذه الاستدلال يكون منطويا على مغالطة إثبات التالي.

ج- قاعدة القياس loi de syllogisme :

وصورتها: ق← ل

م ← ق أو : [(ق ← ل) ∧ (م ← ق)] ←(م ← ل)

إذن: م ← ل

ومعنى هذه الصيغة إذا صدقت ق صدقت ل وإذا صدقت م صدقت ق لزم عن ذلك أنه إذا صدقت م صدقت ل.

3/ استدلالات قائمة على الدالة الفصلية[47]:

اشرنا من قبل إلى أن الانفصال قد يؤخذ بمعنى ضعيف (V) وفيه يكون أحد البديلين صادقا على الأقل.. و لكن قد يؤخذ بمعنى قوي (W) فيكون فيه أحد البديلين فقط صادقا.

وإذا أخذنا الآن الفصل بمعنى الضعيف لأمكننا أن نضع له قاعدة عامة يمكن أن نطلق عليها اسم **قاعدة إنكار البدائل** فإذا قلنا:

[47] Ibid.p46-47.

" إما أن يكون محمد موظفا أو طالبا ،ولكنه ليس موظفا، إذن فهو طالب ".

وإذا قلنا : " إما أن يكون محمد موظفا أو طالبا ، ولكنه ليس طالبا ،إذن فهو موظف".

والاستدلال في الحالتين صحيح ، لأن الفصل يقرر أنّ أحد البديلين صادق على الأقل. ومعنى ذلك انه إذا كذب أحدهما كان لابد من صدق الآخر وعليه فالصورتان التاليتان صحيحتان.

الصورة الأولى

ق ∨ ل

⌐ ق   أو: [(ق ∨ ل) ∧ ⌐ ق] ← ل

إذن : ل

الصورة الثانية

ق ∨ ل

⌐ ل   أو: [(ق ∨ ل) ∧ ⌐ ل] ← ق

إذن: ق

*ولكن إثبات البدائل غير صحيح أي: إذا قلنا:

"إما أن يكون محمد طالبا أو موظفا ، ولكنه طالب ، إذن فهو ليس موظفا ". لكان هذا الاستدلال باطلا، إذ قد يجمع هذا الشخص بين كونه طالبا وكونه موظفا في آن واحد وعليه تكون الصورتان التاليتان باطلتين:

1/ ق ∨ ل

ق   أو : [(ق ∨ ل) ∧ ق] ← ⌐ ل

إذن: ⌐ ل

2/ ق V ل

ل أو : [(ق V ل) ∧ ل] ← ⌐ ق

إذن: ⌐ ق

أما إذا كان الفصل قويا (W) لكانت الصور الأربع السابقة صحيحة إذ أن الفصل في هذا المعنى يقرر وجوب صدق أحد البديلين وكذب الآخر.، هذا يعني أنّه إذا صدق أحد البديلين لكذب الآخر وإذا كذب أحدهما لصدق الآخر، وهكذا تكون جميع الصور السابقة صحيحة في هذا المعنى.

4/ استدلالات قائمة على الدالة الوصلية[48]: Schéma d'inférence conjonctif

نأخذ الآن الاستدلالات القائمة على الدالة الوصلية المنفية أي: ⌐ (ق ∧ ل).

مثال: "من الخطأ القول بأنّ محمد ذهب إلى باتنة وإلى بسكرة"

إنّ معنى هذا القول هو أنّ محمدا لم يذهب إلى إحدى المدينتين على الأقل ، أي إما أنّه لم يذهب إلى باتنة وإما أنّه لم يذهب إلى بسكرة ، وإما أنّه لم يذهب إلى أي من المدينتين.

ومعنى ذلك أن الذهاب إلى أحدهما يعني بالضرورة عدم الذهاب إلى الأخرى وعلى ذلك تكون الصورتان التاليتان صحيحتين.

الصورة الأولى: ⌐ (ق ∧ ل).

ق أو [⌐ (ق ∧ ل) ∧ ق] ← ⌐ ل

⌐ ل.

[48] Ibid.p46

الصورة الثانية:

⌐ (ق ∧ ل)

ل أو : [⌐ (ق ∧ ل) ∧ ل] ← ⌐ ق

⌐ ق

ولكن عدم الذهاب إلى إحدى المدينتين لا يعني بالضرورة الذهاب إلى الأخرى وعلى ذلك تكون الصورتان التاليتان باطلتين.

الصورة الثالثة : ⌐ (ق ∧ ل)

⌐ ق أو: [⌐ (ق ∧ ل) ∧ ⌐ ق] ← ل باطلة

ل

الصورة الرابعة: ⌐ (ق ∧ ل)

⌐ ل أو : [⌐ (ق ∧ ل) ∧ ⌐ ل] ← ق باطلة.

ق

3- النسق الاستنباطي لدوال الصدق:

المقصود بالنسق الاستنباطي شيء قريب مما هم معروف في الهندسة : فالنسق عموما هو نظام يتألف من مقدمات معينة ومحددة ونتائج تلزم عن تلك المقدمات وفق قواعد معينة.

وتظم المقدمات: (1) مجموعة من الأفكار الأولية أو قل اللامعرفات ، و(2) عددا من التعريفات ،(3) وبعض المسلمات أو المصادرات، وهذا النسق يذكرنا بالهندسة الإقليدية.

ومن المعلوم أن أساس حساب القضايا أو دوال الصدق هو الاستنباط وهذا هو السبب الذي دفع كلا من "راسل" Russell و "وايتهيد" Whitehead إلى تسمية هذا المبحث باسم نظرية الاستنباط ،لأنها في واقع الأمر نظرية تتعلق بالطريقة التي تكون فيها قضية مستنبطة من قضية أخرى، ولكي تكون القضية مستنبطة من أخرى، فلا بد أن يكون بين القضيتين تلك العلاقة التي تجعل من أحدهما نتيجة للأخرى فعندما تكون القضية **م** نتيجة للقضية **ن** نقول أن **ن** تلزم عنها **م** أو بتعبير الصوري (ن ← م) وعلى ذلك فإن الاستنباط يقوم على علاقة اللزوم ، وكل نسق استنباطي لا بد أن تنطوي مقدماته على كثير من خواص اللزوم بالقدر الذي يجعل من عملية الاستنباط عملية مشروعة بالضرورة.

يتألف إذن النسق الاستنباطي كما ذكرنا أعلاه من : (1) مقدمات، (2) قواعد معينة (محددة) يتم على أساسها الاستنباط ، (3) المبرهنات المنطقية.

1/ مقدمات النسق الاستنباطي[49]:

يختار المنطقي، شأنه شأن عالم الرياضيات، المقدمات التي يبدأ بها نسقه الاستنباطي الذي يريد إقامته ؛ وقولنا "يختار المقدمات" يعني أن المنطقي له حرية كبيرة في انتقاء المقدمات التي يبدأ بها بناء نسقه، وعليه فقد تختلف الأنساق و تتعدد باختلاف المقدمات و تعددها، شرط أن تأتي المبرهنات (النتائج) مستنبطة استنباطا صحيحا من المقدمات المختارة.

ا- **الأفكار الأولية:** وهي مجموعة من المفاهيم الدالة على أفكار محددة وعلاقات معينة تكون مستخدمة في النسق ويمكننا أن نذكر هنا ثلاثة أفكار هامة في نسقنا المنطقي وهي:

** **فكرة المتغير القضائي- القضيوي-**: المتغيرات القضائية عبارة عن العناصر التي يتألف منها النسق ، و هذه العناصر هي القضايا التي يُطلق عليها اسم القضايا التمهيدية، فالقضايا التي نرمز لها بالرموز ق ، ل ، م ، ن ،... ستكون مستخدمة هنا لتدل على قضايا تمهيدية.

** **فكرة الثابت المنطقي**: وهي الثوابت الخاصة بالنفي، والوصل، والفصل، والاستلزام والتكافؤ ؛ وبإمكاننا أن نأخذ ثابتين أوليين وعن طريقهما يمكننا تعريف الثوابت الأخرى. وذلك حتى لا نكثر من الأفكار الأولية دون مبرر.

49 محمد مهران ، مرجع سابق ، ص 145، و محمد محمد قاسم مرجع سابق،ص123

** **فكرة مجال الثابت**: وتقوم فكرة تحديد مجال الثابت على استخدام الأقواس إذ بدون ذلك لا نستطيع تحديد نوع الدالة ولا معرفة حدود الثوابت المستخدمة فيها.

** **قواعد التركيب**: المقصود بقواعد التركيب تلك القواعد التي يتم على أساسها استخدام الرموز لعمل تركيبات رمزية بطريقة صحيحة، فليس من المشروع أن توضع المادة المنطقية السابقة بأي طريقة كانت أو بأي تركيب كان ، ونستطيع أن نميز بين نوعين من التركيبات التي تظهر فيها مادتنا المنطقية الأساسية هما:

*التعبيرات ذات المعنى أو قل المشروعة وتسمى باسم الصيغ جيّدة التكوين.

*التركيبات الزائفة أو غير المشروعة مثل (ق $\leftrightarrow$ $\vee$ ل $\vee$) وهناك تمييز مشابها في اللغة العادية الطبيعية فهناك عبارات تتم وفق قواعد اللغة العربية مثلا وهناك تركيبات غير سليمة مثلا: (في فوق جدا قطط بين) وهو كلام لا معنى له بل هو لغو. وإذا كان التمييز بين التركيبات الفارغة من المعنى واضحا في اللغات الطبيعية كاللغة العربية مثلا، فإننا في اللغة المنطقية نستطيع أن نحقق مثل هذا الوضوح في مجال المنطق وفق قواعد محددة بشكل دقيق، وتسمى هذه القواعد بقواعد التركيب أو قل قواعد الصياغة.

وينصب اهتمامانا بالطبع على الصيغ أو قل التراكيب المحكمة التكوين، وتنقسم هذه الصيغ إلى قسمين:

(1) الصيغ الصادقة منطقيا أو قل الصيغ التكرارية وهي التي أطلقنا عليها اسم تحصيل الحاصل وهي التي تكون صادقة تحت جميع شروط الصدق.

(2) الصيغ التي لا تكون صادقة منطقيا بل قد تكون متناقضة أو عارضة محتملة وهي الصيغ الفاسدة .

وسوف نركز أكثر ما نركز على الصيغ الحاصلة أي تحصيل الحاصل، حيث تكون بعض هذه الصيغ نقطة البداية في النسق ويكون بعضها الآخر عبارة عن مبرهنات النسق.

*ولنذكر الآن أهم قواعد التركيب المنطقي على النحو التالي:

1/ **ق،ل** ، **م**... صيغ محكمة التكوين.

2/ إذا كانت **ق** صيغة محكمة التكوين لكانت $\neg$ **ق** صيغة محكمة التكوين.

3/ إذا كانت كل من ق، ل صيغة محكمة التكوين كان (ق V ل) صيغة محكمة التكوين وبوجه عام فإن أي صيغتين محكمتين في الصياغة ترتبطان معا بثابت يتطلب حجتين، فإن النتائج تكون صيغة محكمة التكوين.

4/ لا تكون أي تركيبات أخرى من الرموز محكمة التكوين إلا إذا راعت القواعد السابقة ، أو إلا إذا أمكن إحلالها عن طريق التعريف محل تعبير محكم التكوين.

ج/ التعريفات[50]:

في كل نسق منطقي، كما هو الحال في كل نسق رياضي مجموعة من التصورات التي لابد من تعريفها تعريفا دقيقا. وفي حقيقة الأمر تشكل التعريفات ، دون شك ، الركائز الرئيسية التي يقوم عليها أي نسق استنباطي ، و تقوم هذه التعريفات بالطبع على الحدود اللامعرفة التي نسلم بها، وهي هنا الثوابت الأساسية.

ويمكننا أن نعرف بعض الثوابت عن طريق ثوابت أخرى كتعريف افصل عن طريق النفي والفصل أو تعريف الاستلزام عن طريق النفي والفصل كذلك وهكذا، ولهذا يقال عن التعريفات بأنها مجموعة من الصيغ من شأنها أن تقدم لنا ثوابت أخرى عن طريق تعريفها على أساس الثوابت الأولية.

ولعل أهم تعريف في نسقنا هنا هو تعريف اللزوم على أساس الثابتين الأوليين، الفصل والنفي، وهو (ق ← ل) = (┐ ق V ل) بالتعريف ، أو (ق ← ل) ↔ (┐ ق V ل).

د/ المصادرات (المسلمات) postulats أو البديهيات axiomes[51] :

وهي مجموعة من الصيغ نفترضها دون برهان، ويتم على أساسها البرهنة على غيرها من الصيغ ، أو قل هي جملة من القضايا التي نسلم بصحتها تسليما ونستخدمها أساسا لإقامة البرهان على غيرها من القضايا. والأمر هنا اختباري كذلك في انتقاء المصادرات ، المهم في كل ذلك أن تكون برهناته متسقة مع المقدمات التي انطلق منها في نسقه الاستنباطي ومع مراعاة بعض الشروط في هذا الاختبار ويمكن أن نوجز هذه الشروط فيما يلي:

أولا يجب أن تكون المصادرات متسقة فيما بينها وهذا يعني أن الصيغ التي يمكن اشتقاقها لا بد أن تكون على الدوام تحصيل حاصل أو قل تكرارية ، فالشرط الضروري بالنسبة لهذا الأمر هو أنه إذا أمكن اشتقاق أية صيغة

---

[50] محمد محمد قاسم ، مرجع سابق ،ص 140-143.و ص 154.

[51] المرجع نفسه، ص165.

لاستحال اشتقاق نقيضها، إذ لا يجب أن تؤدي المصادرات إلى تناقضات في النسق كأن تؤدي خلال الاستدلال إلى تقرير **ق** و¬ **ق** داخل النسق.

ثانيا يجب أن تتصف مجموعة المصادرات بصفة الاكتمال ويقال عن أية مجموعة من المصادرات أنها مكتملة إذا كانت لها القوة الاستنباطية التي تخول لها استنباط جميع الدوال التكرارية (الحاصلة) المطلوبة في النسق.

3* يجب أن تكون مجموعة المصادرات مستقلة الواحدة منها عن الأخرى، ومعنى ذلك ألا تكون أية مصادرة قابلة لأن تشتق من مجموعة المصادرات الأخرى، لأنها في هذه الحالة ستكون مبرهنة، ويكون وجودها داخل المصادرات حشوا زائدا لا قيمة له.

المصادرات بحسب "راسل Russell "وايتهيد" Whitehead :

قد تبدوا هذه المصادرات صيغا تافهة أو مبتذلة ولكن أهميتها في النظر ما يلزم عنها:

1/ مبدأ تحصيل الحاصل [52] principe de tautologie

(ق V ق) ← ق

و يقرر هذا المبدأ أنه إذا كانت إما **ق** أو **ق** صادقة ، لكانت **ق** صادقة

2/ مبدأ الإضافة Principe de l'addition

ل ← (ق V ل)

و يقرر هذا المبدأ أنه إذا كانت **ل** تعني مثلا اليوم هو الأربعاء، و **ق** تعني اليوم هو الثلاثاء، لكان معنى المبدأ أنه إذا كان اليوم هو الأربعاء لصدق القول بأن اليوم إما أن يكون الثلاثاء أو الأربعاء.

و يسمى هذا المبدأ بهذا الاسم لأنه يقرر أنه إذا كانت لدينا قضية صادقة لأمكن إضافة أي بديل عليها دون أن تنتج عن ذلك قضية كاذبة.

[52] المرجع نفسه ،ص 157.و محمد مهران ، مرجع سابق ، ص165

3/ مبدأ تبادل المواضع (التبديلية) commutativité :

- (ق∨ ل) ← (ل ∨ ق).
- (ق ∧ ل) ← (ل ∧ ق).

بالنسبة للفصل: يقرر هذا المبدأ أنه إذا صدقت (ق ∨ ل) صدقت (ل ∧ ق) ومثال ذلك: إذا كان محمد إما موظفا أو طالبا لكان إما طالبا أو موظفا.

بالنسبة للوصل: يقرر هذا المبدأ أنه إذا صدقت (ق ∧ ل) ومثال ذلك إذا كان محمد جزائريا ومسلما معا لكان مسلما وجزائريا معا.

4/ مبدأ الربط (الجمع) associativité: (تجميعية)

[ق ∨ (ل ∨ م)]← [ل ∨ (ق ∨ م)].

ويعني انه إذا صدقت ق أو (ل أو م) صدقت ل أو (ق أو م) ومعنى ذلك أن المبدأ يقرر لزوما بين متغيرات تتبادل مواضعها ومثال ذلك:

إذا صدق القول بأن محمدا إما أن يكون طالبا أو يكون إما موظفا أو تاجرا، لصدق القول بأنه إما أن يكون موظفا ، آو يكون طالبا آو تاجرا.

في الوصل: [ق ∧ (ل ∧ م)] ← [(ق ∧ ل) ∧ م]

ويعني إذا صدقت **ق** و (**ل** و **م**) صدقت (**ق** و **ل**) و **م** ،ومعنى ذلك أن المبدأ يقرر لزوما بين متغيرات تتبادل مواضعها ومثال ذلك:

إذا صدق القول أن محمدا هو جزائري وهو مسلم و أمازيغي معا لصدق القول أنّه جزائري ومسلم وأنّه أمازيغي.

5/ مبدأ الاحتمال:

الفصل: (ل ← م) ← [(ق V ل) ← (ق V م)]

ومعنى هذا المبدأ أنه إذا كان **ل** يستلزم **م**، لزم عن ذلك أنه إذا كانت **ق** أو **ل** صادقة، صدقت **ق** أو **م**، بمعنى آخر يمكن أن نضيف في أية دالة لزومية بديلا إلى كل من المقدمة والنتيجة دون أن يؤدي ذلك إلى كذب اللزوم في الحجة الاستنباطية ومثال ذلك:

إذا صدق أنه إذا كان هذا الشخص قاتلا كان مجرما ، لزم عن ذلك أنه لو كان إما لصا أو قاتلا لكان إما لصا أو مجرما.

الوصل: (ل ← م) ← [(ق Λ ل) ←(ق Λ م)]

6/ مبدأ التوزيع:

[ق Λ (ل V م)]← [(ق Λ ل) V (ق Λ م)] .

[ق Λ (ل V م)] ← [(ق V ل) Λ (ق V م)].

قواعد الاستنباط[53]:

تتم عملية الاستنباط وفق قواعد محددة تسمى بقواعد الاستنباط، فالبرهنة على أي مبرهنة من مبرهنات النسق ، إنما تتم وفق هذه القواعد من المقدمات التي ذكرناها وهناك قاعدتان أساسيتان للاستنباط هما قاعدة الاستبدال وقاعدة الاستدلال.

أولا قاعدة الاستبدال:

وتفرر هذه القاعدة أنّه من الممكن أن نضع مكان أي متغير متغيرا آخر أو دالة مؤلفة من حدود النسق، ذلك في أي مصادرة أو مبرهنة أقيم البرهان عليها أو على صحتها ويتم الاستبدال بطريقتين:

[53] محمد مهران ،مرجع سابق، ص168,

الطريقة الأولى: الاستبدال الموحد

وهي طريقة تتعلق بالاستبدال الذي يقع على المتغيرات وحدها، فتخول لنا هذه الطريقة أن نستبدل بهذه المتغيرات متغيرات أخرى أو دوال، وذلك في جميع أجزاء الدالة أو قل الصيغة.

مثال: ل← (ق V ل) (مبدأ الإضافة)

ولو شئنا أن نضع (ق V ل) بدل من **ق** --- و نكتبها على الشكل التالي ***(ق V ل) / ق*** و نقراها : **ق** فصل **ل** على **ق** --- فإن طريقة الاستبدال الموحد تسمح لنا بإجراء ذلك وينتج ما يلي:

ل ← [(ق V ل) V ل].

ولو شئنا أن نستبدل مكان **ل** في دالة أصلية [ل← (ق ← ل)]، ¬ ق لتحصلنا على ما يلي:

¬ ق ← (ق V ¬ ق) .

و هكذا وعلى هذا المنوال نستطيع أن نضع مكان متغير متغيرا آخر أو دالة بحيث نستطيع تقريري النتائج بوصفها مبرهنة.

الطريقة الثانية: الاستبدال عن طريق التعريف[54].

وهي طريقة تتعلق باستبدال الصيغ وليس المتغيرات أي استبدال دالة مكان دالة أخرى، فيجب أن تكون الدالتان متكافئتين عن طريق التعريف. وليس هذا النوع من الاستبدال موحدا بمعنى أنه يجيز الاستبدال بالنسبة لأي تعبير كلما ورد في الصيغة، بل يتم الاستبدال بالنسبة لأي جزء من الصيغة بحيث نستطيع أن نستبدل بهذا الجزء ما يكافئه من حيث التعريف.

مثال ذلك: ل ← (¬ ق V ل).

نستطع انطلاقا من هذه الصيغة أن نصل إلى صيغة أخرى :

---

[54] المرجع نفسه، ص 170، و محمد محمد قاسم ، مرجع سابق ، ص 160.

ل ← (ق ← ل). (بالتعريف) (الفصل والاستلزام)

ولو كان لدينا: [(ق ← ل) ∧ (ل ← م)] ← (ق ← م) .

لاستطعنا أن نصل بتطبيق هذا الاستبدال إلى:

⊢ [(ق ← ل) ∧ (ل ← م)] v (ق ← م) التعريف (الفصل والاستلزام).

2/ قاعدة الاستدلال[55]:

وتسمى هذه القاعدة أحيانا باسم قاعدة إثبات المقدم، وأحيانا أخرى باسم قاعدة الفصل détachement ومؤدى هذه القاعدة أنه إذا كانت لدينا مصادرة أو مبرهنة أقيم البرهان عليها ولتكن **ق** وكانت (ق ← ل) كان من الممكن أن نستدل على **ل**. أو بعبارة أخرى إذا ما عرفنا أن **ق** صادقة وأن **ق** يلزم عنها **ل**. لكان في استطاعتنا أن نتقدم لتقرير **ل** ، دون ذكر **ق**، أي أن نكتفي بذكر التالي دون المقدم.

وتقوم هذه القاعدة –كما هو واضح – على أساس قيم صدق الدالة اللزومية فنحن نعلم أنه إذا مادام صدق المقدم فيها كان التالي صادقا بالضرورة. وهذا ما وضعناه من قبل من بين الاستدلالات الصحيحة وهو ما يعبر عن القاعدة المعروفة باسم قاعدة إثبات المقدم وصورتها.

ق ← ل		ق
ق	أو	ق← ل
ل		ل

[(ق ← ل) ∧ ق] ← ل / [ق ∧ (ق ← ل)] ← ل .

[55] محمد مهران ، مرجع سابق، ص 171.و محمد محمد سالم ، مرجع سابق ، ص 163,

3 / قاعدة التقرير[56] (الوصل) la règle de l'assertion:

وتسمى هذه القاعدة باسم **مبدأ الوصل** **le principe de la jonction**: ومؤدى هذه القاعدة (أو هذا المبدأ) أنّه إذا كانت كل من **ق** ، **ل** مصادرة أو مبرهنة تَمَّ البرهان عليها، لكان وصلهما (ق ∧ ل) عبارة عن دالة مبرهنة.

ونستخدم هذه القاعدة في البرهنة على تكافؤات من قبيل:

(⌐ ق ← ل) ↔ (⌐ل ← ق)

فلنفرض أننا أثبتنا بالبرهان أن (⌐ ق ← ل) ← (⌐ ل ← ق). وأيضا:

(⌐ ل ← ق) ← (⌐ ق ← ل).

فإننا نستطيع باستخدام مبدأ الوصل أن نضع الدالة الوصلية التالية:

[(⌐ ق ← ل) ← (⌐ ل ← ق)] ∧ [(⌐ ل ← ق) ← (⌐ ق ← ل)].

وتكون هذه الدالة مطلوبة لاشتقاق المبرهنة:(⌐ ق ← ل) ↔ (⌐ ل← ق).

فإذا طبقنا على دالتنا الوصلية تعريف التكافؤ:

(1 ↔ 2) = [(1 ← 2) ∧ (2 ← 1)]   بالتعريف

لا ستطعنا أن نصل إلى المبرهنة المراد البرهنة عليها.

*هذه هي إذن مقدمات نسقنا الاستنباطي وقواعد الاستنباط التي بمقتضاها تتم البرهنة على المبرهنات والآن كيف تتم هذه البرهنة؟.

---

[56] محمد مهران ، مرجع سابق ،ص 171- 172,

المبرهنات[57] les Théorèmes :

سنقدم بعض المبرهنات وطريقة البرهنة عليها كما جاءت في كتاب (مبادئ الرياضيات) عند "راسل" ، "واتهيد".

المبرهنة الأولى : ويرمز لها ب (م1).و هي برهان الخلف

(م1): (ق←⌐ ق) ← ⌐ ق.

البرهان: نكتب البرهان بهذه الصيغة:

[تحصيل الحاصل الذي هو : (ق v ق)← ق ، و ⌐ ق/ ق — نفي **ق** على **ق** ـ] نحصل على

(⌐ ق v ⌐ ق) ← ⌐ ق......(1).

[(1) + تعريف الاستلزام عن طريق الفصل والنفي أي (1← 2) ↔ (⌐ 1 v 2)] نحصل على : (⌐ ق ← ⌐ ق) ← ⌐ ق.

شرح البرهان[58]:

1/ لفظ تحصيل الحاصل [ونختصره منذ الآن وصاعدا بكلمة (تحصيل)] الوارد بين القوسين الأولين يعني مبدأ تحصيل الحاصل وهو أحد المصادرات التي ذكرناها.

2/ **⌐ق/ ق** تمثل تطبيق قاعدة الاستبدال وتعني أننا سوف تستبدل بالمتغير **ق** نفيه وهو **⌐ ق**. ونلاحظ هنا أننا حينما نطبق قاعدة الاستبدال فإننا نشير إلى عملية الاستبدال بخط نضع تحته ما نريد أن نستبدله أو قل المستبدل و نضع فوقه بدلا من المراد أو بتعبير أخر البديل ، و في برهاننا الذي نحن بصدد استبدالنا **⌐ ق** بدلا من **ق** مطبقين بذلك قاعدة الاستبدال الموحد .

---

57 محمد محمد قاسم ،مرجع سابق ، ص 164،

58 محمد مهران ، مرجع سابق، ص174

ملاحظة: كتبنا تحصيل الحاصل ثم قاعدة الاستبدال وهذا يعني أننا نطبق قاعدة الاستبدال الموحد على مبدأ تحصيل الحاصل.

3/ الصيغة المذكورة في السطر الأول هي الصيغة التي حصلنا عليها بعد عملية الاستبدال السابق وقد أعطينا لهذه الصيغة رقم (1).

4/ أما قولنا + تعريف الاستلزام عن طريق الفصل والنفي تعني بناء على ذلك التعريف ورقم (1) يعني بناء عن الصيغة التي تحصلنا عليها بعد الاستبدال وأعطينا لها رقم (1).

5/ أما الصيغة المذكورة في الأخير فهي الخطوة الأخيرة في البرهان وهي الصيغة التي وصلنا إليها بناء على ما ذكرناه في الخطوة السابقة أي تطبيق التعريف على الصيغة (1) وبالنظر إلى هذه الصيغة الأخيرة نلاحظ أنها المبرهنة نفسها المراد البرهنة عليها.

(ق ← ⌐ ق) ← ⌐ ق.

لجأنا إلى: (ق v ق) ← ق مبدأ تحصل الحاصل.

ثم طبقنا عليه قاعدة الاستبدال الموحد واضعين ⌐ ق بدلا من ق . ⌐ق/ق.

فتحصلنا على (⌐ق v ⌐ ق) ← ⌐ ق .....(1).

ثم طبقنا تعريف الفصل عن طريق اللزوم والنفي والذي هو:

(1 v 2)↔(⌐ 1 ← 2) فنحصل على:

(⌐ق v ⌐ ق) ↔ (ق ←⌐ ق). ثم نحصل على:

(ق ←⌐ ق) ← ⌐ ق. وهي الصيغة التي نريد البرهنة عليها.

المبرهنة الثانية (م2)[59]:

(م2) : ل ← (ق←ل).

البرهان: [بالإضافة و ¬ ق/ ق] نحصل على الدالة : ل← (¬ ق v ل)....رقم 1.

[(1) + تعريف الفصل عن طريق اللزوم والنفي] نحصل على ل← (ق←ل).

شرح البر هان:

1- لما كانت الدالة المراد البرهنة عليها دالة لزومية: المقدم فيه متغير والتالي دالة، وكان مبدأ الإضافة هو وحده الذي له هذه الصورة حسب إجابتنا المؤقتة السابقة فقد أخذناه كمفتاح لبرهاننا على هذه المبرهنة.

2- استخدمنا مبدأ الاستبدال الموحد ووضعنا ¬ **ق** بدلا من **ق** أي **¬ق/ق** ذلك لأن الاختلاف ما بين المبرهنة والمبدأ يكمن في التالي فيهما، فبينما تأتي المبرهنة دالة لزومية (ق ← ق)، فإن تالي مبدأ الإضافة هو دالة انفصالية (ق v ل).

ولو كان البديل الأول في هذا التالي الأخير منفيا لأصبح مساويا من حيث التعريف لتالي المبرهنة ولذلك استخدمنا قاعدة الاستبدال الموحد ووضعنا ¬ **ق** مكان **ق** في مبدأ الإضافة وحصلنا على الصيغة التالية:

ل← (¬ ق v ل).

وبتطبيق تعريف الفصل عن طريق اللزوم والنفي، على التالي في هذه الصيغة اللزومية نصل إلى:

ل← (ق ← ل). وهذه هي المبرهنة نفسها المراد البرهنة عليها.

المبرهنة الثالثة (م3)[60]:

(م3): (ق ← ¬ ل) ← (ل ← ¬ ق).

---

[59] المرجع نفسه ، ص177,

[60] المرجع نفسه ، ص178و محمد محمد قاسم ، مرجع سابق ، ص 163,

البرهان:

[تبادل و ¬ق/ق ، ¬ل/ ل] نحصل على (¬ ق v ¬ ل) ← (¬ ل v ¬ ق)…..(1).

[(1) و تعريف الاستلزام عن طريق الفصل والنفي] نحصل على دالتنا المطلوبة

(ق ← ¬ ل) ← (ل ← ¬ ق).

الشرح:

لجأنا إلى مبدأ التبادل أو قل الخاصة التبديلية [(ق v ل) ← (ل v ق)]. ثم استعملنا قاعدة الاستبدال الموحد ¬ق/ ق و ¬ل/ل و كانت هذه هي الخطوة رقم (1) التي تعبر عن دالة لزومية وبتطبيق تعريف الاستلزام عن طريق النفي والفصل على كل من الطرفين التالي والمقدم وصلنا إلى نفس النظرية التي نبرهن عليها.

المبرهنة الرابعة[61] (م4):

(م4): [ق ← (ل ←م)] ← [ل ← (ق←م)].

البرهان:

[الربط و ¬ق/ ق و¬ل/ ل] نجد [¬ق v (¬ل v م)] ← [¬ ل v (¬ق v م)]...(1)

[(1) و تعريف الاستلزام عن طريق الفصل والنفي] [ق← (ل←م)]←[ل← (ق← م)].

الشرح:

إننا أمام دالة مركبة تتألف بدورها من دالتين مركبتين تمثلان المقدم والتالي بتلك المبرهنة المركبة وبمقارنة هذه المبرهنة بمصادرة الربط ، وجدنا أن مبدأ الربط وحده الذي تتوفر فيه الصورة السابقة لأن هذا المبداهو عبارة عن دالة مركبة، تتألف أيضا من دالتين مركبتين وقد طبقنا على المبدأ قاعدة الاستبدال الموحد واضعين **¬ ق** بدلا من **ق** و**¬ل** بدلا من **ل** فكانت لدينا الصيغة (1) التالية :

[61] محمد مهران ،مرجع سابق ، ص 179.

[⌐ ق V (⌐ ل V م)] ← [⌐ لV (⌐ ق V م)].

ونلاحظ أنها دالة لزومية المقدم فيها دالة انفصالية البديل الأول فيها منفيا والثاني مثبتا، وهذا يعني أنها تساوي دالة لزومية من حيث تعريف الاستلزام بالفصل والنفي، ومثل هذا يقال عن التالي في الدالة اللزومية السابقة وعلى ذلك نستطيع أن نطبق التعريف المذكور عليها لنصل إلى الصيغة التالية:

[ق← (⌐ ل V م)] ← [ل← (⌐ ق V م)].

وإذا نظرنا هنا إلى المقدم والتالي في هذه الصيغة اللزومية لوجدنا أن كلا منهما عبارة عن دالة لزومية بالمثل، والتالي في كل منهما عبارة عن دالة انفصالية، البديل الأول منفي والتالي مثبتا ومعنى ذلك أننا يمكن أن نضع مكانهما ما يساويهما من حيث التعريف وعلى ذلك وصلنا إلى الصيغة التالية: [ق ← (ل ← م)] ← [ل ← (ق ← م)].

وهذه الصيغة الأخيرة هي المبرهنة نفسها التي أردنا البرهنة عليها.

المبرهنة الخامسة (م5)[62]:

(م5) : (ل← م) ← [(ق ← ل) ← (ق ← م)] .

البرهان:

[الإجمال و ⌐ ق/ ق] نحصل على (ل←م) ← [(⌐قV ل) ← (⌐ قV م)]...(1).

[(1) و تعريف الاستلزام بالفصل والنفي] نجد (ل←م) ← [(ق←ل) ← (ق←م)].

الشرح:

استخدمنا في هذا البرهان مبدأ الاستدلال على مصادرة الإجمال ثم تحصلنا على الصيغة (1) ثم طبقنا تعريف الاستلزام على تلك الخطوة فيما يخص تالي اللزوم فيها ولما كان هذا التالي هو بدوره دالة لزومية فقد طبقنا تعريفنا على كل من المقدم والتالي في هذه الدالة الأخيرة فوصلنا إلى المبرهنة المراد البرهنة عليها.

[62] المرجع نفسه ، ص 181.

المبرهنة السادسة(م6)[63]:

(م6): (ق←ل) ← [(ل←م) ← (ق←م)].

[(م4) و (ل←م)/ ق، و(ق←ل) /ل ، و (ق←م) / م].نحصل على الدالة التالية:

(1):{ (ل←م)←[(ق←ل)←(ق←م)] }←{ (ق←ل)←[(ل←م)← (ق←م)] }.

لدينا (م5) : (ق←م) ← [(ق←ل) ← (ق←م)].....(2).

[من (1)و (2) و قاعدة الاستدلال] نجد (ق←ل) ← [(ل←م) ← (ق←م)].

شرح البرهان:

يبدو أنّ البرهان على المبرهنة التي نحن بصددها أكثر تعقيدا من البراهين التي قدمناها للمبرهنات السابقة لأننا استخدمنا هنا أول مرة مبدأ الاستدلال، فضلا عن أننا نستبدل الدوال بالمتغيرات لأول مرة أيضا و هذا جعل البرهان يبدو على شيء من التعقيد فلنحلل الآن هذا البرهان.:

1/ لجأنا إلى مبرهنة تمَّ البرهان عليها وهي المبرهنة الرابعة (م4) وهنا بتطبيق قاعدة الاستبدال الموحد بالصورة الموضحة بين القوسين الأولين [(ل←م)/ ق، و(ق←ل) /ل ، و (ق←م) / م]. فينتج عن ذلك الصيغة الموضحة في الخطوة الأولى وهي دالة لزومية المقدم فيها هو: ((ل←م) ← [(ق←ل) ← (ق←م)]

، والتالي هو : (ق←ل) ← [(ل← م) ← (ق← م)].

2/ إذا تأملنا المقدم في الصيغة (1) لوجدنا المقدم المذكور هنا هو نفس المبرهنة الخامسة (م5) التي أقمنا البرهان عليها وأعطيناها رقم(2).

3/ لما كانت الخطوة (1) دالة لزومية تقرر الصورة العامة القائلة إذا صدق هذا (المقدم) صدق ذلك (التالي) ولما كانت الخطوة (2) تقرر صدق هذا (المقدم) فإننا نستطيع طبقا لمبدأ الاستدلال تقرير ذلك (التالي)

[63] المرجع نفسه ، ص181- 182

بوصفه مبرهنة مستقلة أي نكتفي بذكر التالي دون ذكر المقدم الذي ثبتت صحته وهذا ما تدل عليه الخطوة الأخيرة فما بين القوسين الأخيرين يعني بناء على الخطوة (1) والخطوة (2) مع تطبيق مبدأ الاستدلال ينتج ما يلي:

(ق←ل) ← [(ل← م) ← (ق ← م)].

وهذه هي نفس المبرهنة التي أردنا البرهنة عليها.

المبرهنة السابعة (م7)[64]:

(م7): ق← (قvق).

البرهان:

[الإضافة و ق/ ل] نحصل على ق← (ق v ق).

الشرح:

نلاحظ أننا قد وصلنا إلى البرهنة على المبرهنة بمجرد اللجوء إلى مبدأ الإضافة [ل← (ق v ل)] مع تطبيق الاستبدال فقط فوضعنا **ق** بدلا من **ل** فنتج عن ذلك صيغة جديدة هي نفس المبرهنة التي أردنا البرهنة على صحتها.

المبرهنة الثامنة (م8)[65]:

(م8): ق ← ق.

البرهان:

1- [(م5) و قvق / ل و ق / م].نحصل على :

[(قvق) ← ق] ← { [ق ← (قvق)] ← (ق←ق)}......(1).

64 المرجع نفسه ، ص 183،

65 المرجع نفسه ، ص 184

2- لدينا [تحصيل الحاصل] : (قvق) ←ق......(2)

3- [من (1) و(2) و الاستدلال] نجد [ق← (قv ق)] ← (ق← ق)....(3)

4- لدينا [م7] : ق← (ق v ق)......(4)

5- [و من (3) و (4) و الاستدلال] نصل إلى دالتنا (ق ← ق).

شرح البرهان:

1* للبرهنة على هذه المبرهنة لجأنا أولا إلى المبرهنة الخامسة (م5) وطبقنا عليها قاعدة الاستبدال بالصورة المذكورة بين القوسين الأولين حيث نتج عن هذه العملية الصيغة المذكورة في الخطوة (1)

2* الصيغة المذكورة في (1) هي دالة لزومية المقدم فيها هو نفس مبدأ تحصيل الحاصل المذكور في الخطوة (2).

3* بناء على الصيغة اللزومية (1) ومبدأ تحصيل الحاصل الذي يمثل المقدم فيها نستطيع أن نطبق مبدأ الاستدلال ونكتفي بتقرير التالي فيها وهذا ما فعلناه في الخطوة الثالثة.

4* نلاحظ أن الصيغة التي وصلنا إليها في الخطوة الثالثة هي أيضا دالة لزومية، المقدم فيها هو نفس المبرهنة السابعة (م7) وهذا ما ذكرناه في الخطوة الرابعة.

5* وعلى ذلك نستطيع أن نطبق مبدأ الاستدلال حيث نكتفي بتقرير التالي في الصيغة اللزومية الثالثة، بناء على (4) مع تطبيق مبدأ الاستدلال وهذا ما فعلناه في الخطوة الأخيرة حيث نتج عن ذلك المبرهنة التي أردنا البرهنة عليها: (ق← ق).

المبرهنة التاسعة (م9)[66]:

(م9): (⌐ قv ق).

[66] المرجع نفسه ، ص 185,

البرهان:

[(م8) و بتطبيق تعريف الاستلزام بالفصل والنفي] نحصل على (⌐قvق).

الشرح: أقمنا البرهان هنا بمجرد تطبيق التعريف على المبرهنة السابقة (م8).

المبرهنة العاشرة (م10)[67]:

(م10): (قv ⌐ ق).

البرهان:

1- [التبادل و ⌐ ق/ ق و ق/ ل]نحصل على (⌐ ق v ق) ← (قv ⌐ ق).....(1)

2- [لدينا (م9)] : (⌐ قv ق).........(2)

3- [و من (1) و (2) و الاستدلال] نحصل على (قv ⌐ ق).

شرح البرهان:

لا نلاحظ في هذا البرهان شيئا جديدا: بدأنا بمبدأ التبادل مع تطبيق الاستبدال بالصورة المذكورة، بين القوسين الأولين، فنتج عن هذه المبرهنة الصيغة المذكورة في الخطوة (1) وهي دالة لزومية المقدم فيها هو نفس المبرهنة السابقة (م9) وعليه نستطيع تطبيق مبدأ الاستدلال لنقرر الثاني فقط وهذا ما قمنا به في الخطوة الأخيرة وقد نتج عن هذه العملية نفس المبرهنة التي أردنا البرهنة عليها وهي تجسد قانون الثالث المرفوع (قv ⌐ ق) أي (إما ق أو لا ق).

[67] المرجع نفسه ، ص 186.

م (11) (ق ← ¬ ¬ ق)

البرهان :

(1) $\dfrac{+\ \neg\ ق}{ق}$

(2) التعريف:

م (12) (ق ∨ ¬ ¬ ¬ ¬ ق)

البرهان :

(1)الاجمال + $\dfrac{\neg\ ق}{ل}$ ، $\dfrac{\neg\ \neg\ \neg\ ق}{م}$

(2) م 11 + $\dfrac{\neg\ ق}{ق}$

(3) (1) + (2) + الاستدلال

(4) م (10)

(5) (3) + (4) + الاستدلال

م (13) : (¬ ¬ ق← ق)

(1)–التبادل + $\dfrac{\neg\ \neg\ \neg\ ق}{ل}$

(2)– م (12)

(3)–(1)+(2)+الاستدلال

(4) –(3) + التعريف

م(14) : ق ← (ق ∨ ل)

(1)- م 5 + $\frac{\text{ل} \lor \text{ق}}{\text{ل}}$ ، $\frac{\text{ق} \lor \text{ل}}{\text{م}}$

(2)-التبادل + $\frac{\text{ق}}{\text{ل}}$ ، $\frac{\text{ل}}{\text{ق}}$

(3)-(1) +(2)+ الاستدلال

(4)-الاضافة + $\frac{\text{ق}}{\text{ل}}$ ، $\frac{\text{ل}}{\text{ق}}$

(5)-(3)+(4) +الاستدلال

م(15): (¬ ق← ل)

(1)- م5 + $\frac{\neg\,\text{ق}}{\text{ق}}$ + $\frac{\neg\,\neg\,\text{ل}}{\text{م}}$

(2)-م (11)

(3)- (1) + (2) + الاستدلال

(4)- م (3) + $\frac{\neg\,\text{ق}}{\text{ق}}$ + $\frac{\neg\,\text{ل}}{\text{ل}}$

(5)- م(5) + $\frac{\neg\,\text{ل}}{\text{ق}}$ ، $\frac{\neg\,\neg\,\text{ق}}{\text{ل}}$ ، $\frac{\text{ق}}{\text{م}}$

(6)-م (13)

(7)-(5) +(6) + الاستدلال

(8)-م(5) ، $\frac{\neg\,\text{ق} \leftarrow \neg\,\neg\,\text{ل}}{\text{ل}}$ ، $\frac{\neg\,\text{ل} \leftarrow \neg\,\neg\,\text{ق}}{\text{م}}$ ، $\frac{\neg\,\text{ق} \leftarrow \text{ل}}{\text{ق}}$

(9)-(8) + (4) + (3) + الاستدلال

(10)- [م(5) + $\frac{\neg\,\text{ق} \leftarrow \text{ل}}{\text{ق}}$ ، $\frac{\neg\,\text{ل} \leftarrow \neg\,\neg\,\text{ق}}{\text{ل}}$ ، $\frac{\neg\,\text{ل} \leftarrow \text{ق}}{\text{م}}$]

(11)- (10) +(7) + (9) + الاستدلال

م(16): (ق ∧ ل) ← (ق ∧ ل)

البرهان:

(1)- م (8) + ق ∧ ل

ق

م(**17**) (ق ∧ ل) ← ¬ (¬ ق ∨ ¬ ل)

البرهان

(1)م (16) + التعريف (وصل ↔ فصل + نفي)

م(18) : (¬ ق ∨ ¬ ل) ← ¬ (ق ∧ ل)

م(16) + التعريف (الفصل ← الفصل)

م(19) : ¬ (ق ∧ م ق)

(1)- م(18) + ¬ ق

ل

(2)- م (10) + ¬ ق

ق

(3)-(1) ، (2) + الاستدلال

م (20) ق ↔ ¬ ¬ ق

(1)- م(11)

(2)-م (13)

(3)-(1) + (2) قاعدة التقرير بالبرهان بالوصل

(4)-(3) + تعريف التكافؤ (اللزوم و الوصل)

م (**21**) ق ↔ (ق ∨ ق)

(1)-تحصيل حاصل

(2) الاضافة + ق

ل

(3) (1) ،(2) قاعدة التقرير (الوصل)

(4) (3) + تعريف التكافؤ (الاستلزام + الوصل)

3- منطق المحمولات أو دوال القضايا[68].

إذا كنا في حساب القضايا أو كما أطلقنا عليها حساب دوال الصدق، قد تناولنا القضايا على أساس أن كل قضية تمثل كلا واحدا حتى نرى علاقات هذه القضايا بعضها بالبعض الآخر، فإننا في دوال القضايا أو قل في منطق المحمولات سوف نتناول البنية الداخلية للقضايا بمعنى أننا سوف نحلل القضايا بالتعرف على الأجزاء التي تنطوي عليها، وطبيعة هذه الأجزاء. ففي القياس التالي وهو من أضرب القياس المنتجة:

كل إنسان فان   كل إنسان فان وسقراط إنسان إذن سقراط فان.

سقراط إنسان   (ق ∧ ل) ← م.

إذن سقراط فان

لو اكتفينا بالوسائل التي يوفرها لنا منطق دوال الصدق (حساب القضايا) للبت في صحة هذا الدليل لحصلنا على الجدول التالي:

(ق	∧	ل)	←	م
ص	ص	ص	ص	ص
ص	ص	ص	<u>**ك**</u>	ك
ص	ك	ك	ص	ص
ص	ك	ك	ص	ك
ك	ك	ص	ص	ص
ك	ك	ص	ص	ك
ك	ك	ك	ص	ص
ك	ك	ك	ص	ص

يظهر عن هذا الجدول أن الصورة فاسدة، ومع ذلك نحن نعلم أن هذا الضرب من القياس صحيح دون شك ، وعليه يجب معرفة طريقة أخرى للبرهنة على صحة هذا القياس وتتمثل في معرفة العلاقات الحاصلة بين العبارات الداخلة في تركيب القضايا: **إنسان، سقراط، فان**، فهذه العبارات ليست بقضايا بل هي أجزاء تدخل في

[68] François Lepage, Eléments de logique contemporaine ,éd.P.U . Montréal , 2010 ,p164

تركيب القضايا وعليه وجب علينا حتى نحصل على دالة صحيحة جديدة، أن لا نتوقف عند اعتبار القضايا وحدات أولية، بل نتعدى ذلك إلى تحليل البنية الداخلة للقضية وهو موضوع دراستنا.[69]

لنأخذ مثالا آخر:

كل العاطلين عن العمل كسالى.

بعض الفنانين عاطلون عن العمل

إذن بعض الفنانين كسالى

صورة هذا القياس هي (ق∧ل)⟵ م.

فمن نفس جهة جدول الصدق كما يبين أعلاه أن هذه الصورة باطلة (فاسدة) وعليه فلا بد أن نلجأ إلى البنية الداخلية لكل قضية من القضايا التي تؤلفها فهي قضايا تقوم على استخدام اللفظين "كل" و "بعض "وكذلك على الطريقة التي ارتبطت بها الألفاظ "عاطل" و "كسول" و "فنان "فضلا عن الطريقة التي ارتبطت بها القضايا، وهذا يعني كما قلنا أعلاه أن ما قدمناه من طرق و وسائل تقنية للبرهنة على صحة الصور لا يمكن أن نطبقه على هذا النحو الجديد من الحجج وعليه لابد من وسائل جديدة تتلاءم وطبيعة هذا النوع من القضايا المحللة.

الموضوع والمحمول والسور[70]

من المعلوم أنّ القضية الحملية – أبسط أنواع القضايا في المنطق التقليدي – تتألف من موضوع ومحمول مثل: سقراط إنسان – محمد نبي– ابن سينا فيلسوف ؛ فهذه القضايا الحملية تسمى القضية المخصوصة أو القضية المفردة، لأنها تنسب صفة الإنسان أو النبوة أو الفلسفة إلى فرد مخصوص هو سقراط ، محمد ابن سينا على التوالي، فكلمة سقراط (أو محمد أو ابن سينا) موضوعة للدلالة على شخص واحد فقط ، وكذلك هي الحال مع الكلمات

[69] Denis vernant, Introduction à la logique standard, éd.Flammarion, Paris , 200,.p126

[70] Ibid. p165.et Denis vernant, Introduction à la logique standard, op.cit.p163

محمد، ابن سينا وسائر أسماء العلم ، فهذه الكلمات التي تستخدمها اللغة لتشير إلى فرد احد فحسب ، نطلق عليها اسم الموضوعات، أما كلمة إنسان (نبي، فيلسوف) فهي علامة لا تقتصر على الدلالة على فرد واحد مخصوص بل على عكس أسماء العلم، يمكن حملها إيجابا أو سلبا على عدة أفراد.

فنقول: سقراط إنسان

علي إنسان

أبو الهول ليس إنسان

فالكلمات التي تتصف بهذه الخاصية نسميها محمولات، والمحمولات قد تُؤدى بمقولات لغوية مختلفة ، منها الاسم و الفعل والنعت وقد تُؤدى بألفاظ مركبة مثل:

سقراط شرب السم

الجويني أستاذ الغزالي

15 قابل للقسمة على 3

فالعبارة (شرب السم) (أستاذ الغزالي)، (وقابل للقسمة على 3) هي محمولات لأنها قد تدل على صفات ، يمكن حملها إيجابا أو سلبا على أفراد عدة في طريقة الكتابة الجديدة التي نأخذ بها، سوف نغير ترتيب الألفاظ فنقدم المحمول على الموضوع ونحصر الموضوع بين قوسين[71] فنكتب مثلا:

إنسان (سقراط)	بدلا من	سقراط إنسان
إنسان (ابن سينا)	بدلا من	ابن سينا إنسان
إنسان (محمد)	بدلا من	محمد إنسان.

[71] عادل فاخوري، مرجع سابق ، ص 141-

فنلاحظ أن القضايا المخصوصة التي ذكرناها تشترك رغم تباين موضوعاتها في بنية واحدة ، أو قل صورة واحدة نستطيع أن نرسمها هكذا:

إنسان(......)، حيث الفسحة (....) تشير إلى الموضوعات المختلفة التي يمكن أن تطرأ على الصيغة، فللدلالة على أي موضوع نستعمل بدل الفسحات كما فعلنا في منطق القضايا الحروف: **س** ، **ع** ، **ص** ؛ فنكتب العبارة السابقة على النحو:

إنسان (س) ونخص هذه الحروف باسم متغيرات الموضوع لأنها لا تقبل أن تحل محلها إلا الموضوعات تمييزا لها عن متغيرات القضايا التي تقوم مقام القضايا فقط.

والعبارة إنسان (س) ليست قولا تاما متعينا حتى نعرف صدقها من كذبها كما في الحال مع القضايا إنسان (سقراط)، إنسان (ابن سينا)....الخ وإنما تصبح قضية صادقة أو كاذبة وفق القيمة أي الموضوع الذي يتعاقب عليه (**س**)، فإن كان (**س**) = سقراط ، كانت "إنسان (سقراط)" قضية صادقة ، وفي حال كون **س**= أبا الهول تكون العبارة "إنسان (أبو الهول)" قضية كاذبة ، وعليه فالعبارة إنسان (**س**) ونظائرها من العبارات غير المتعينة ،نسميها أيضا صورة قضية ؛ ونرمز للمتغيرات **تا**، **فا**، **عا**... للدلالة على المحمولات وعليه يمكن التعبير عن القضية: سقراط إنسان بـ **تا(س)**[72].

الأسوار[73]

القضية " كل شخص هو إنسان" هي قضية تبين حمل المحمول على ***كل*** موضوع وباستعمال المتغيرات تصبح العبارة على الشكل التالي " كل س هو إنسان".

---

[72] المرجع نفسه ، ص 142.

[73] محمد محمد قاسم. مرجع سابق،ص 209.

أما القضية "البعض هو إنسان ": فهي تصرح بوجود موضوع واحد على الأقل يحمل عليه المحمول ويمكن التعبير عنها بقولنا يوجد على الأقل شيء واحد هو إنسان ومع المتغيرنحصل على العبارة التالية : ***بعض*** س هو إنسان.

نقول: يوجد على الأقل **س** واحد، بحيث أن **س** هو إنسان.

وفي اللغة الرمزية سوف نستعيض عن لفظ "كل" نرمز∀ [74]ونطلق عليه ما أسماه المناطقة العرب **السور الكلي** ، فتصير القضية " كل س هو إنسان" على الشكل التالي :

∀ (س) إنسان (س) = ∀ (س) تا (س)

وتقرأ مهما تكن س فإن س تحقق تا

أما كلمة "بعض" ومترادفاتها "يوجد واحد على الأقل"...الخ فنرمز لها بالرمز E [75]واسمه السور البعض أو السور الوجودي ونكتب القضية:

بعض س هو إنسان

E (س) انسان (س) = E (س) تا (س).

وتقرأ يوجد س واحد على الأقل بحيث يحقق تا .

*إن الرمز ∀ (س) هو عبارة عن السور[76] الكلي le quantificateur universel من أجل **س** ، أما العبارة ∀ (س) تا(س) فهي اختصار للقضية الوصلية (٨).

تا (أ) و تا (ب) و تا (ج)،وتا (د)......الخ.

[74] Thierry Lucas et autres,Initiation à la logiquesformelle, éd.de boeck, Bruxelles, 2007, p57
[75] Ibid. p57.
[76]كلمة تسويرquantificaton كلمة مستعملة لدى المناطقة العرب القدامى فليراجع ذلك لدى ابن حزم في كتابه التقريب لحد المنطق

أما الرمز E (س) هو عبارة عن السور الوجودي le quantificateur existentiel[77] من أجل س.

أما العبارةE (س) تا (س) فهي اختصار للقضية الفصلية (V).

تا(أ)،أو تا(ب) أو تا(ج) أو تا(د).....الخ.

القضايا التقليدية الأربعة:

تقسم القضية الحملية في المنطق التقليدي إلى أربعة أصناف هي:

_ القضية الكلية الموجبة: كل إنسان فان.

_ القضية الكلية السالبة: لا إنسان حجر.

_ القضية الجزئية الموجبة: بعض الحيوان إنسان.

_ القضية الجزئية السالبة: ليس بعض الحيوان إنسان.

وتضم هذه القضايا علاوة على السور (كل و بعض) رُكنين أساسيين هما: الموضوع (المحكوم عليه)، والمحمول (المحكوم به)[78].

و لترجمة القضايا الأربعة ، المذكورة أعلاه ، إلى اللغة الرمزية كان لابد لنا أن نقرر بالتفصيل المقصود من كل واحدة منها .

فالأولى: كل إنسان فان ، تعني أنّ كل واحد مما هو إنسان فهو فان.

[77] Alfred Tarski, op. cit.p8.

[78] عادل فاخوري، مرجع سابق ، ص 147

أي: كل شيء، إن وجد هذا الشيء، وكان إنسانا ، فهذا الشيء فان.

وباستعمال الرموز: كل **س** إذا كان **س** إنسانا فإنّ **س** فان[79].

وأخيرا:

∀ (س)[إنسان (س) ← فان (س)] = ∀ (س)[تا(س)←عا(س)].

فالعارضتان تحددان هنا مجال السور الكلي، بحيث أن سائر المتغيرات الواقعة بينهما تكون مقيدة بهذا السور ومجال السور له أهمية إذ به تتعين بنية القضية ومدلولها.

فإذا كتبنا ∀ (س) [إنسان (س) ← حجر (س)].

قصدنا أن كل إنسان هو حجر وهذا واضح أنه كاذب بينما حين نكتب:

∀ (س) انسان (س) ← ∀ (س) حجر (س) ويقابله في اللغة العادية قولنا إذا كان كل شيء انسان فكل شيء حجر وهو قول صادق. لأن المقدم كاذب وكذلك التالي كاذب وعليه فالقضية الشرطية صادقة:

ق ← ل

ك ص ك

القضية الكلية السالبة[80]: فيما يخص القضية الثانية: (لا إنسان حجر) والتي تعني (لا واحد من الإنسان بحجر؛ أي كل شيء،إذا كان هذا الشيء إنسانا فليس هذا الشيء حجرا.

وبالرموز كل : س، س هو إنسان ← ليس س حجرا.

---

[79] المرجع نفسه،ص148.

[80] المرجع نفسه ، ص149.

∀ (س) [إنسان (س) ⟵ ⌐ حجر (س)] = ∀ (س) [تا(س) ⟵ ⌐عا(س)].

*أما الجزئية الموجبة[81]: "بعض الحيوان إنسان" : نعني به يوجد شيء واحد على الأقل، بحيث أن هذا الشيء هو حيوان و إنسان معا. أي أنّه يوجد **س** واحد على الأقل بحيث أن **س** هو حيوان و **س** هو إنسان. فنعبر عن قولنا هذا بـ :

E (س) [حيوان (س) ∧ إنسان (س)] =E (س) [تا(س) ∧ عا(س)].

حيث مجال السور البعضي E (س) يضم أو يحصر سائر العبارة [حيوان (س)∧إنسان (س)]. وهذا يختلف مع قولنا: بعض س هو كذا وبعض س هو كذا.

فقولنا E (س) [حيوان (س) ∧ حجر(س)] ، أي بعض الحيوان هو حجر وهذا كاذب. بينما قولنا :

E (س) حيوان (س) ∧ E (س) حجر (س) ، ومعنى ذلك أن البعض هو حيوان والبعض هو حجر وهو قول صادق.

الجزئية السالبة[82]: "بعض الحيوان ليس بإنسان"، تعني أنّه يوجد شيء واحد على الأقل بحيث أن هذا الواحد هو حيوان وليس هو إنسان، أي يوجد **س** واحد على الأقل بحيث **س** هو حيوان و ليس **س** إنسانا.

E (س)[حيوان(س)∧ ⌐ إنسان(س)]= E (س) [تا(س)∧ ⌐عا(س)].

وتكتب صور القضايا التقليدية الأربعة على الوجه التالي:

---

[81] المرجع نفسه ، ص 149

[82] المرجع نفسه ، ص 150.

∀ (س) [تا(س)← عا(س)]   تقرأ   كل تا هي عا.

∀ (س) [تا(س)← ┐عا(س)]   تقرأ   لا تا هي عا.

E (س)[تا(س) ∧ عا(س)]   تقرأ   بعض تا هو عا.

E (س)[تا(س) ∧ ┐عا(س)]   تقرأ   بعض تا ليس عا.

فهذه العبارات ونظائرها التي تحتوي على المتغيرات تا، عا ، فا... هي أيضا صور لأن مدلولها لا يتعين إلا حين إحلال محمولات محمل المتغيرات المذكورة.

ملاحظة : عندما عبرنا عن القضايا السابقة باللغة الرمزية لم نكن بحاجة إلا لسور واحد لكل قضية ، إلا أنّه قد تدخل هذه الأسوار على كثير من العبارات و الجمل ، كقولنا مثلاً: " إما كل الناس بيض أو بعض الناس سود " فيكون شكلها الرمزي على النحو التالي :

∀ (س) [إنسان(س) ← أبيض (س)] ∨ E (س) [إنسان (س) ∧ أسود (س)]

∀ (س) [تا (س)← عا (س)] ∨ E (س) [تا (س) ∧ فا (س)]

و هي قضية تضم سورين اثنين، الأول عبارة عن السور الكلي و الثاني عبارة عن السور الوجودي، و لنأخذ مثالا أخر : " إذا وقعت جريمة و لم يشتك أحد ، فكل من شاهد الجريمة هو جبان أو هو شريك فيها " فعند تحليلنا لهذه القضية المركبة نجد أنّها تتضمن ثلاثة أسوار ، فعي باللغة الرمزية تصبح على الشكل التالي :

E (س) جريمة (س) ∧ ┐ E (س) يشتكي (س) ← ∀ (س) [شاهد الجريمة (س) ← جبان (س) ∨ شريك (س)] أي بتعبير أدق :

[E (س) تا (س) ∧ ¬ E (س) عا (س)] ← ∀ (س) [فا (س) ←ها (س)∨ حا (س)]

ملاحظة: إن الفرق بين القضايا الكلية والقضايا الجزئية إنما هو فرق بين ما هو صادق دائما وبين ما هو صادق أحيانا ، أو قل بين ما يصدق بالنسبة لجميع القيم وما يصدق بالنسبة لبعض القيم ؛ فالقضايا الكلية هي تعميمات تقوم على اللزوم، بينما القضايا الجزئية تعميمات تقوم على الوصل .

التعريفات في منطق المحمولات[83]:

إذا كنا قد عرفنا في حساب القضايا تعريفات ثمانية كتعريف الفصل عن طريق النفي والوصل أو الوصل عن طريق الفصل والنفي وهكذا، فإننا بوجه عام نستطيع القول بأن نفي أحد العوامل يمكن التعبير عنه عن طريق العامل الآخر وعلى ذلك تكون الصيغتان التاليتان:

1/ ¬ ∀(س)[تا(س)←عا(س)]↔ E (س) (س)[تا(س) ∧ ¬عا(س)] .

2/ ¬ E (س) [تا(س) ∧ عا(س)] ↔ ∀(س) [تا(س)← ¬عا(س)].

وإذا عبرنا عن عليها بأمثلة قلنا:

1/ ليست جميع الأشياء حيوانات ↔ هناك فرد واحد على الأقل ليس حيوانا.

2/ ليس هناك شيء هو غول ↔ لا شيء هو غول.

ومن الواضح أن نفي الطرفين الأوليين من الصيغتين السابقتين يؤدي إلى التكافؤين التاليين:

¬¬∀(س)[تا(س)←عا(س)] ↔ ¬ E (س)[تا(س) ∧ ¬عا(س)] .

[83] محمد مهران ، مرجع سابق، ص 210.

3/ ∀ (س) [تا(س) ← عا(س)] ↔ ⌐ E (س) [تا(س) ∧ ⌐عا(س)] .

⌐⌐ E (س) [تا(س) ∧ عا(س)] ↔ ⌐ ∀(س) [تا(س)← ⌐عا(س)].

4/ E (س) [تا(س)∧عا(س)] ↔ ⌐∀ (س)[تا(س)← ⌐عا(س)].

ويمكن جمع التكافؤات على الشكل التالي:

*1 ∀(س)[تا(س)←عا(س)]↔⌐E (س)[تا(س) ∧ ⌐عا(س)] .

*2 ∀(س)[تا(س)←⌐عا(س)] ↔ ⌐ E (س) [تا(س) ∧عا(س)] .

*3E (س) [تا(س)∧ عا(س)] ↔ ⌐∀(س)[تا(س)← ⌐عا(س)].

*4 E (س)[تا(س)∧ ⌐عا(س)] ↔⌐∀(س)[تا(س)← عا(س)].

1/ الكلية الموجبة ↔ نفي الجزئية السالبة.

2/ الكلية السالبة ↔ نفي الجزئية الموجبة.

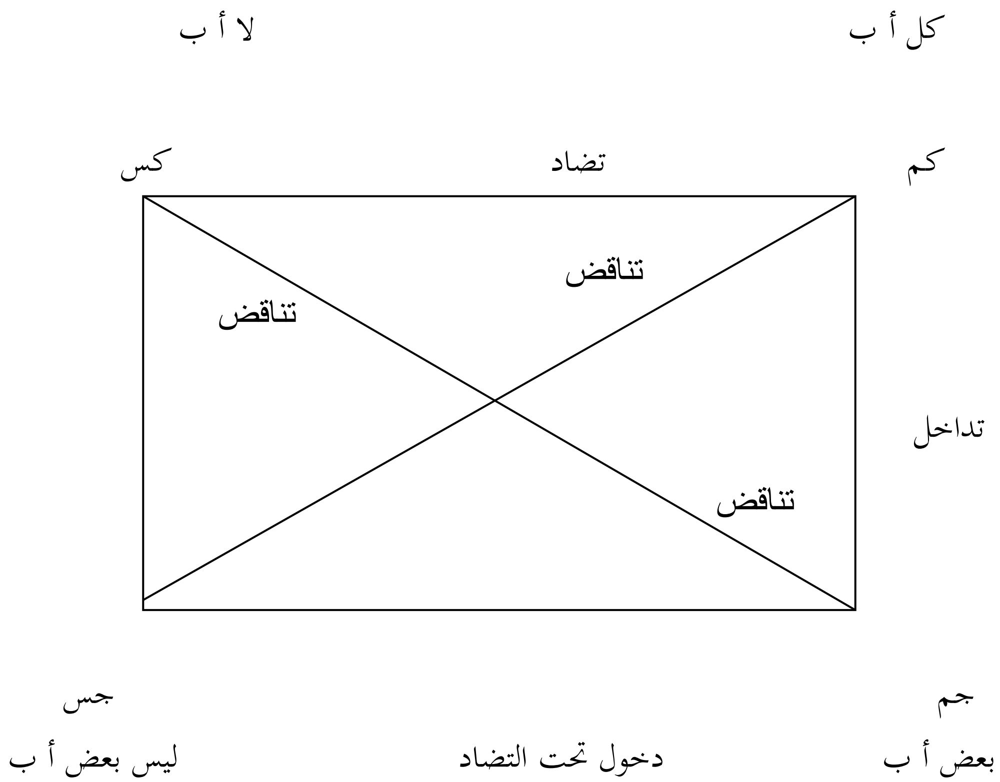
3/ الجزئية الموجبة ↔ نفي الكلية السالبة.

4/ الجزئية السالبة ↔ نفي الكلية الموجبة.

و بعبارة مختصرة القضية تكافئ نفي نقيضها.

العلاقات القائمة بين القضايا الحملية وبعض الاستدلالات القائمة عليها[84]:

حتى نوضح العلاقات القائمة بين القضايا الحملية نلجأ إلى العلاقات الخاصة بالتقابل تلك التي تقدم ملخصة فيما يسمى مربع التقابل أو قل مربع أرسطو وهو على الوجه التالي:

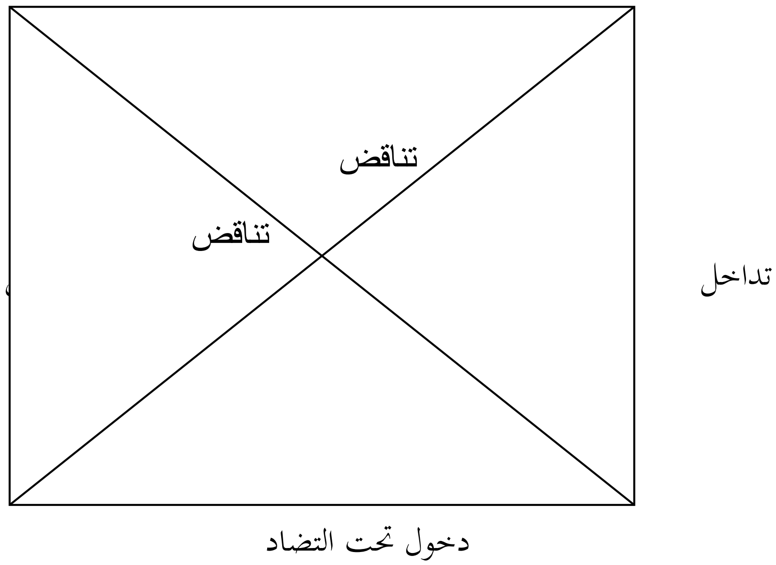


[84] Laurence Bouquiaux et Bruno Leclercq, Logique formelle et argumentation, op.cit.p58-59

وإذا ما حاولنا تحويلها إلى رموز نحصل على هذا التقابل على الشكل التالي[85]:

∀(س)[تا(س)← عا(س)]　　　　∀(س)[تا(س)←⌐عا(س)]

⌐E (س)[تا(س) ∧ ⌐عا(س)]　　　　⌐ E(س)[تا(س) ∧ عا(س)] .



E(س) [تا(س)∧عا(س)]　　　　E (س)[تا(س)∧ ⌐عا(س)].

⌐∀(س) [تا(س)← ⌐عا(س)]　　　　⌐∀(س) [تا(س)←عا(س)].

شرح مربع التقابل:

1- علاقة التضاد: وتكون بين الكليتين وبين صورهما المتكافئة ومن المعروف أن القضيتين المتضادتين لا تصدقان معا ولكن قد تكذبان معا بمعنى أن صدق احدهما يستلزم كذب الأخرى ولكن كذب إحداهما لا يستلزم بالضرورة صدق الأخرى أو كذبها وبناء على ذلك تكون الصيغتان التاليتان صادقتان.

- ∀(س)[تا(س)←عا(س)] ← ⌐∀(س)[تا(س)←⌐عا(س)].
- ∀(س)[تا(س)←⌐عا(س)] ← ⌐∀(س)[تا(س)←عا(س)]..

[85] Thierry Lucas et autres,Initiation à la logiquesformelle, op.cit., p58- 63

2– علاقة التناقض[86]: وتكون بين القضيتين المختلفتين كمًّا:[(كل) ، (بعض)]، وكيفًّا (الإيجاب والسلب) أي بين الكلية الموجبة والجزئية السالبة وبين الكلية السالبة والجزئية الموجبة، أي بين:

- ∀(س)[تا(س) ⟵عا(س)] / E (س) [تا(س)∧ ¬عا(س)].
- ∀(س)[تا(س)=>¬عا(س)] / E(س) [تا(س)∧عا(س)].

ومن الواضح من هذه الصياغات وما يناظرها من صيغ مكافئة أن القضيتين المتناقضتين لا تصدقان معا ولا تكذبان معا بمعنى أن صدق إحداهما يؤدي إلى كذب الأخرى بالضرورة، وأن كذب إحداهما يؤدي إلى صدق الأخرى وعليه تكون الصيغ الأربع الآتية صحيحة.

∀(س)[تا(س)⟵عا(س)] ⟵ ¬ E(س) [تا(س) ∧ ¬عا(س)].

¬∀(س)[تا(س)⟵عا(س)] ⟵ E(س) [تا(س)∧ ¬عا(س)].

∀(س)[تا(س)⟵¬عا(س)] ⟵¬E(س) [تا(س)∧عا(س)].

¬∀(س)[تا(س)⟵¬عا(س)] ⟵ E(س)[تا(س)∧عا(س)].

3/ علاقة الدخول تحت التضاد:

وتكون بين القضيتين الجزئيتين أي بين :

E (س) [تا(س)∧عا(س)]   و   E(س) [تا(س)∧ ¬عا(س)].

والحكم في مثل هذه العلاقة أن القضيتين الداخليتين تحت التضاد لا تكذبان معا ولكن قد تصدقان معا، بمعنى أنه إذا كذبت إحداهما صدقت الأخرى أما إذا صدقت إحداهما فلا يستلزم ذلك كذب الأخرى أو صدقها وعلى ذلك تكون الصيغتان التاليتان صحيحتين.

[86] محمد محمد سالم مرجع سابق ، ص 236.

¬∃(س) (س)[تا(س)∧عا(س)] ←∃(س) [تا(س)∧ ¬عا(س)].

¬∃ (س) (س)[تا(س)∧ ¬عا(س)] ← ∃ (س) [تا(س)∧عا(س)].

4/ علاقة التداخل[87]:

وتكون بين القضية الكلية والقضية الجزئية المتفقتين في الكيّف ،أي بين الكلية الموجبة والجزئية الموجبة ،وبين الكلية السالبة والجزئية السالبة؛ أما الحكم على التداخل فيمكن تلخيصه فيما يلي:

أ– في حالة صدق الكلية تصدق الجزئية بالمثل أما في حالة كذبها فلا يمكن الحكم على الجزئية لا بالكذب ولا بالصدق.

ب– في حالة كذب الجزئية تكون الكلية كاذبة بالمثل، أما في حالة صدقها فلا يمكن الحكم على الكلية بصدق أو لا بكذب.

وعلى هذا الأساس تكون الصيغتان التاليتان صحيحتين:

∀(س)[تا(س)←عا(س)] ← ∃ (س)[تا(س)∧عا(س)].

¬ ∃(س)[تا(س)∧عا(س)] ←¬ ∀(س)[تا(س)←عا(س)].

*ومثل هذا يقال في حالة الكلية السالبة والجزئية السالبة حيث تكون الصيغتين صحيحتين.

∀(س)[تا(س)←¬عا(س)] ← ∃ (س)[تا(س)∧ ¬عا(س)].

¬∃ (س)[تا(س)∧ ¬عا(س)] ←¬ ∀(س)[تا(س)←¬عا(س)].

[87] محمد مهران مرجع سابق ، ص 215.

هذا ما يقرره المنطق القديم في مربع التقابل، أما المنطق الحديث فله رأي آخر ذلك لأنّ المنطق الحديث لا يسلم في مربع التقابل إلاّ بعلاقة التناقض وحدها.

1- علاقة التضاد[88].

قلنا أن هذه العلاقة لها صيغتان من وجهة النظر التقليدية وسبيلنا الآن إلى التحقق من صحتهما هو استخدام جداول الصدق.

أ- ∀ (س)[تا(س)⟵عا(س)] ⟵ ⌐∀(س)[تا(س)⟵⌐عا(س)].

ويمكن التعبير عن هذه الدالة بلغة حساب القضايا ودوال الصدق وذلك بتعويض:تا(س)=ق عا(س)=ل

(ق ⟵ل) ⟵ ⌐(ق ⟵ ⌐ل) ، فيكون جدول الصدق على الشكل التالي:

(ق	⟵	ل)	⟵	⌐	(ق	⟵	⌐ل)
ص	ص	ص	ص	**ص**	ص	ك	ك
ص	ك	ك	ص	**ك**	ص	ص	ص
ك	ص	ص	ك	**ك**	ك	ص	ك
ك	ص	ك	ك	**ك**	ك	ص	ص

وهي دالة فاسدة وعارضة محتملة.

ب - ∀ (س)[تا(س)⟵ ⌐ عا(س)] ⟵ ⌐ ∀(س) [تا(س) ⟵ عا(س)]

---

[88] محمد مهران ، مرجع سابق، ص 216.

وبتعويض تا(س)=ق   عا(س)=ل نحصل على الصيغة التالية

(ق ← ⌐ل) ← ⌐ (ق ← ل)

(ق	←	⌐ل)	←	⌐	(ق	←	ل)	
ص	ك	ك	ص	ك	ص	ص	ص	
ص	ص	ص	ص	ص	ص	ك	ك	
ك	ص	ك	ك	ك	ك	ص	ص	
ك	ص	ص	ك	ك	ك	ص	ك	

وهي دالة فاسدة وعارضة محتملة.

2* علاقة التناقض[89]:   نقدم مثالين فقط

أ- ∀(س)[تا(س)←عا(س)] ← ⌐ E(س)[تا(س)∧ ⌐عا(س)].

وبلغة حساب القضايا:

[89] محمد مهران ، مرجع سابق ، ص 217.

(ق ← ل) ← ⌐ (ق ∧ ⌐ل)

ص ص ص **ص** ص ص ك ك

ص ك ك **ص** ك ص ص ص

ك ص ص **ص** ص ك ك ك

ك ص ك **ص** ص ك ك ص

وهي دالة تكرارية صحيحة (تحصيل الحاصل)

ب- ⌐∀(س)[تا(س)←عا(س)] ← E(س)[تا(س) ∧ ⌐عا(س)].

وبلغة حساب القضايا: ⌐ (ق ← ل) ← (ق ∧ ⌐ل)

⌐ (ق ← ل) ← (ق ∧ ⌐ل)

ك ص ص ص **ص** ص ك ك

ص ص ك ك **ص** ص ص ص

ك ك ص ص **ص** ك ك ك

ك ك ص ك **ص** ك ك ص

وهي دالة تكرارية صحيحة(تحصيل الحاصل)

وهكذا تتفق وجهة النظر التقليدية مع وجهة نظر المنطق الرمزي الحديث بالنسبة للاستدلالات الخاصة بالتناقض.

3– علاقة الدخول تحت التضاد[90]: وقد ذكرنا لهذه العلاقة صيغتين صحيحتين من وجهة النظر التقليدية هما:

أ- E (س)[تا(س)∧عا(س)] ← E(س)[تا(س) ∧ ⌐عا(س)].

[90] المرجع نفسه ، ص 218.

وبلغة حساب القضايا:

⌐ (ق ∧ ل) ← (ق ∧ ⌐ ل)

ك ص ص ص ص ص ك ك

ص ص ك ك ص ص ص ص

ص ك ك ص ك ك ك ك

ص ك ك ك ك ك ك ص

نلاحظ أنّها فاسدة و عارضة محتملة.

ب- ⌐E(س)[تا(س) ∧ ⌐ عا(س)] ← E(س) [تا(س) ∧ عا(س)]

وبلغة حساب القضايا:

⌐ (ق ∧ ⌐ ل) ← (ق ∧ ل)

ص ص ك ك ص ص ص ص

ك ص ص ص ص ص ك ك

ص ك ك ك ك ك ك ص

ص ك ك ص ك ك ك ك

نلاحظ أنّها فاسدة و عارضة محتملة.

4- علاقة التداخل [91]

لقد ذكرنا أعلاه أن علاقة التداخل تحوز على أربعة صيغ صحيحة من وجهة النظر التقليدية ، و سوف نكتفي بتطبيق صيغتين اثنتين فقط لأنّ ما ينطبق عليها ينطبق كذلم على الصيغتين الباقيتين .

أ - ∀ (س)[تا(س) ← عا(س)] ← E(س) [تا(س) ∧ عا(س)]

[91] محمد محمد قاسم، مرجع سابق ،ص 228.

وبلغة حساب القضايا:

(ق → ل) → (ق ∧ ل) و بتطبيق جدول الصدق لها نحصل على الشكل التالي :

(ق	→	ل)	→	(ق	∧	ل)
ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص
ص	ك	ك	ص	ص	ك	ك
ك	ص	ص	ك	ك	ك	ص
ك	ص	ك	ك	ك	ك	ك

و نلاحظ أنها كذلك فاسدة و عارضة محتملة.

ب – ⌐ E(س) [تا(س) ∧ عا(س)] ← ⌐ ∀ (س)[تا(س) ← عا(س)]

و بلغة حساب القضايا

⌐	(ق	∧	ل)	←	⌐	(ق	←	ل)
ك	ص	ص	ص	ص	ك	ص	ص	ص
ص	ص	ك	ك	ص	ص	ص	ك	ك
ص	ك	ك	ص	ك	ك	ك	ص	ص
ص	ك	ك	ك	ك	ك	ك	ص	ك

و هي كما نلاحظ دالة فاسدة و عارضة محتملة .و عليه تكون جميع الاستدلالات الخاصة بعلاقة التداخل خاطئة من وجهة نظر المنطق الرمزي الحديث [92]

[92] محمد محمد قاسم ، مرجع سابق ، ص236

4- حساب الفئات – الأقسام – les classes

الفئة هي مجموعة معينة من الأفراد les individus ، كقولنا فئة الطلبة ،و فئة الموظفين، و فئة الأساتذة وهكذا ؛ و قد نستخدم لفظ طالب أو لفظ موظف أو لفظ أستاذ للدلالة على الفئة ، ففئة الإنسان مثلا تدل على جميع الناس ن و فئة الطالب هي جميع الطلبة و فئة الكلب هي جميع ما هناك من كلاب شرقا و غربا و هكذا الأمر مع جميع الفئات الممكنة[93] .

و إذا قلنا أنّ الفئات مجموعة من الأفراد ،فهذا يعني أنّ الأفراد اسبق من الفئة في الوجود ، لأنّ الفئة يمكن تحليلها إلى كائنات أو قل إلى أفراد تُكوّن هذه الفئة أو تلك الفئة .

و يمكن معالجة موضوع الفئات من زاويتين مختلفتين ، إحداهما رياضية منطقية و الأخرى فلسفية أو بتعبير أخر وجودية معرفية ، فمن الناحية الفلسفية يمكن دراسة الفئات من حيث علاقتُها بالواقع ، أما من الناحية الرياضية المنطقية فيمكن دراستها من ناحية الصور المنطقية للواقع الذي ينطوي عليها هذا الواقع .

و نتيجة لهاتين الزاويتين من المعالجة ، نجد في تعريف الفئات اتجاهين اثنين أحدهما فلسفي، و الأخر منطقي رياضي ، بحيث يقوم الاتجاه الأول – أي الفلسفي- على " المفهوم " la compréhension، و يقوم الاتجاه الثاني – المنطقي – على أساس " الماصدق " l'extension ، و هو اختلاف قديم قدم المنطق . و لقد انقسم المناطقة في ذلك إلى فريقين : فريق المناطقة الفلاسفة الذين يقولون بالمفهوم ، و فريق المناطقة الرياضيين الذين يقولون بالماصدق.

و لقد وقف **برتراند رسل** موقفا وسطا بين الاتجاهين رغم أنّه ينتمي إلى التيار المنطقي الرياضي ، فمما لا شكّ فيه أنّ **رسل** يركز أساسا على الماصدق في تحديده للفئات ، إلا أنّه لا يقلل من أهمية المفهوم – العنوان بتعبير إبن سينا – في هذا التحديد[94] ، ذلك أنّ التعريف بالماصدق يمكن أن يرتد و يرجع إلى التعريف بالمفهوم ، في حين أنّ التعريف بالمفهوم لا يمكن رده إلى التعريف بالماصدق حتى من الناحية النظرية ، ذلك أننا في حياتنا الواقعية نستطيع أن نَعرف في الغالب ، الكثير عن الفئة دون أن يكون في استطاعتنا عدُّ أعضائها، فلا يستطيع أحد منا جميع الناس بشكل دقيق مع ذلك فنحن نعرف الكثير عن هذه الفئة ، و هذا يكفي في نظر رسل لبيان أن التعريف بالماصدق غير ضروري لمعرفة الفئة .

و يعني كل هذا أنّ رسل يرى أنّ هناك وجهة نظر ثالثة تتوسط المفهوم الخالص و الماصدق الخالص ، و في هذه المنطقة المتوسطة يقيم المنطق الرمزي ، بحيث لا يمكن أن ننظر إلى الفئة نظرة ماصدقية خالصة و لا نظرة مفهومية صرفة . و هذا يعني أنّ الخاصة المشتركة بين أعضاء الفئة ، تلك التي ينفرد بها عن غيرها من الفئات ، و هي التي تعطي معنى لماصدقات الفئة ، و عليه فإنّ معنى الفئة إنّما يتمُّ حين يتحدد المفهوم و الماصدق معا .

---

[93] محمد مهران ، مرجع سابق ، ص 241.و محمد محمد قاسم مرجع سابق ص 299- 300

[94] عادل فاخوري ، منطق العرب ، دار الطليعة ، بيروت ،ط3

فكرة المفهوم : إنّ تصور فكرة "الإنسان" عندما نحللها نجدها أنّها مؤلفة من عدة خصائص متى اجتمعت هذه الخيرة في ذات واحدة حصلت صورة ذهنية متميزة لا تختلط بغيرها؛ فتصور "الإنسان" يحصل في الذهن عندما يكون الكائن جوهرا جسما حيا حساسا و ناطقا ، و تصور " الحيوان" يحصل في الذهن عندما يكون الكائن جوهرا و حيا و جسما و حساسا.[95]

تعريف المفهوم[96] : هو جملة العناصر أو الصفات التي يتألف منها المعنى في العقل و التي لولاها جميعا لما ائتلف المعنى و تشكّل في الذهن.و يلزم من هذا أنّ المفهوم هو جملة الصفات الضرورية لقيام معنى من المعاني في الذهن متميّزا عما سواه من المعاني و الصفات ،صفات ذات كانت أو صفات عرض.

فالصفة الذاتية هي التي تدخل في تكوين حقيقة الشيء، كالحيوانية بالنسبة للإنسان ، فلا تتحقق ماهية الإنسان إلاّ بأن يكون حيوانا . أما الصفة العرضية هي التي لا تدخل في تكوين حقيقة الشيء ن بل توجد بعد الشيء أي تلحق به ، و مثال ذلك صفة الكاتب فهي صفة تلحق بالإنسان و لا تدخل في ماهيته.

فكرة الماصدق – المصداق– المعنى من حيث هو مدرك عقلي أي من حيث معقول ن قد تمّ تجريده من عدد من الصور الحسية فهو بمقتضى ذلك منفصل من عدد الصور التي جرده منها العقل ، و بالتالي فهو صالح لأن ينطبق على أي فرد تجتمع فيه الصفات التي يتكون منها مفهوم التصور ، و عندئذ يمكننا أن نقول في تعريف الماصدق : أنّه جملة الأفراد الذين يصدق عليهم مفهوم معين ؛ و يلزم من هذا أنّ الماصدق هو عدد الأفراد الذين يتحقق فيهم المفهوم .و مثال ذلك معنى "المسلم" يصدقُ على كل من نطق بالشهادتين مع الصدق فيهما . و معنى " جزائري" يصدق على كل من اكتسب الجنسية الجزائرية بالنسب أو بالولادة.

قاعدة عامة : إذا قارنا بين تصور الحيوان و تصور الإنسان من حيث المفهوم و جدنا أنّ مفهوم:

1- الحيوان :جوهر و جسم وحي وحساس .

2- الإنسان : جوهر و جسم و حي و حساس و ناطق.

أي أنّ مفهوم الإنسان أوسع من مفهوم الحيوان إذ يزيد عليه بصفة ناطق . و إذا قارنا بين التصورين من حيث الماصدق ، فإنه لا شك أنّ ماصدق الحيوان أكبر بكثير من ماصدق الإنسان ذلك أنّ ماصدق الحيوان يضمّ الحيوان الناطق و غير الناطق أما ماصدق الإنسان فهو الناطق وحده فقط . و من هنا يمكننا القول أن المفهوم و الماصدق متناسبان فيما بينهما تناسبا عكسيا ، أي كلما كان مفهوم التصور واسعا كان ماصدقه ضيقا ن و كلما كان ماصدق التصور واسعا كان مفهومه ضيقا [97].

[95] عادل فاخوري ، المنطق الرياضي ،مرجع سابق ، ص 174

[96] علي سامي النشار ، مرجع سابق ، ص 155

[97] المرجع نفسه، ص 195

مما تقدم يمكننا تقديم تعريفا جامعا للفئة على الشكل التالي:

تعريف الفئة : و مما تقدم يمكن تعريف الفئة على الشكل التالي،فنقول الفئة هي جملة الكائنات التي تحوز صفة معينة أو قل هي جميع تلك الكائنات التي تحقق دالة قضية معينة. فإذا قلت :" **س** إنسان " ،كانت جميع الكائنات التي يمكن أن تُوضع مكان **س** لكي تتحول هذه الدالة إلى دالة صادقة ، هي المقصودة بالفئة .

و يقال عن الدالة في هذه الحالة أنّها "تحدد " أو "تعيّن " الفئة؛ و يشكل أعضاء الفئة القيم ذات المغزى الخاصة بالدالة ، تلك التي تتحول إلى قضية صادقة بعد أن نضع هذه القيم مكان المتغيرات الواردة فيها .و لذلك فإنّ تحديد كل فئة ينطوي في واقع المر على دالة قضية معينة ، ففئة الناس تتحدد بالدالة " **س** إنسان" إذ يمكننا أن نضع جميع أفراد الناس مكان **س** في هذه الدالة مثل : "أحمد إنسان" ،" محمد إنسان" ، "فاطمة إنسان" ... إلخ ، و هكذا يمكننا تحديد الفئة على أنّها جميع الموضوعات التي تحقق دالة قضية معينة ، ويطلق على الأفراد التي منها تتكون الفئة اسم "أعضاء الفئة" أو عناصر الفئة[98].

فأفراد الناس نحو محمد و مصطفى و مريم و فاطمة...إلخ يشكلون أعضاء فئة الناس ، و جميع الأقلام مثل : قلم رصاص و قلم سيال و قلم حبر...إلخ تشكل فئة الأقلام و هكذا ..وعلى عكس ذلك يمكننا تعريف أعضاء الفئة على أنّها تلك القيم les valeurs التي يمكن أن تُوضع في دالة المحددة بحيث لا ينتج عن ذلك قضية كاذبة أو هي باختصار : القيم الصحيحة لدالة قضية معينة و يرمز للفئة المحددة بدالة القضية **تا(س)** بالرمز **أ** – **عا(س)** بالرمز **ب** و **فا(س)** بالرمز **جـ** و هكذا –

و تتألف الفئة من الأعضاء الذين ينتمون إلها و نرمز لهم بالرموز **س**، **ص** ، **ز** ...إلخ، فإذا كان لدينا **س** ، ونريد أن نعبر عن دخوله في فئة من الفئات فسنعبر عن ذلك على الوجه التالي : **س ∈ أ**، بحيث أنّ ∈ تسمى إبسيلون و تدل على معنى الانتماء أي دخول عنصر أو عضو في الفئة التي ينتمي إليها ، و عليه يمكن قراءة الصيغة س ∈ أ على الوجه التالي :[**س** عضو في الفئة المحدودة بـ **تا**] أو[**س** ينتمي إلى الفئة التي تتصف عناصرها بالصفة **تا**] . و إذا كانت الفئة هنا تعني فئة الناس ، كان معنى هذه الصيغة أن س ينتمي إلى فئة الناس، أو باختصار **س** إنسان،و على ذلك تكون صيغتنا مساوية للدالة تا(س)، أي **س∈ أ = تا(س)** تعريف .

و معنى هذه العبارة أي التعريف ، أنّ القول بأنّ **س** ينتمي إلى فئة يحوز أعضاؤها الصفة **تا** معناه أن **تا(س)**.

أهم العمليات الخاصة بالفئات[99]

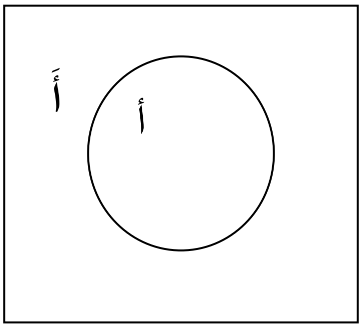
1– عالم المقال و الفئة المتممة

إذا افترضنا أنّ هناك ما ليس لونه أحمر فنقول أنّه لا ينتمي إلى فئة الأشياء الحمراء ، أي أنّه ينتمي إلى فئة الأشياء غير الحمراء ، و هذه الأخيرة تشمل كل الألوان ما عدا اللون الأحمر ، و يعني ذلك أنّ فئة الأشياء الحمراء ة

[98] محمد مهران ، مرجع سابق ، ص244.

[99] المرجع نفسه ، ص 247.

فئة الأشياء غير الحمراء تضمان مع جميع الألوان ، و يطلق عادة على مثل هذا العالم – عالم الألوان – اسم عالم المقال . و يشمل عالم المقال على كل شيء من شأنه أن يكون ذا معنى إذا ما أُدخل كعضو في الفئة " أ " فئة الأشياء الحمراء ، فمن الخطإ القول بأنّ الليمون عضو في فئة الأشياء الحمراء ، فالليمون يقع في دائرة الأشياء الملونة تلك التي تكون إما حمراء أو غير حمراء ، أما نظرية المثل الأفلاطونية فلا يقال عنها أنها حمراء أو غير حمراء ، و عليه لا تنتمي إلى عالم مقال الموضوعات الملونة . فعالم المقال هو مجرد وسيلة لتحديد الفئة المنفية – **ليس أ**– تحديدا دقيقا ، و تسمى **لا أ** أو **نفي أ** ، و يرمز لها بالرمز أَ – بالفتحة – و الفتحة هنا ترمز للنفي ؛ و إذا عرفنا فئة من الفئات فبإمكاننا أن نعرف و بطريقة آلية فئة أخرى هي نفي الأولى ، و تشكل الفئات معا ما أطلقنا عليه أعلاه اسم عالم المقال ، إذا رمزنا الآن لعالم المقال بمربع و رمزنا للفئة أ بدائرة داخل المربع لكانت الفئة أَ – بالفتحة – هي كل ما بقي من المربع كما يظهر في الشكل التالي :



و تسمى أ أحيانا باسم الفئة المتممة التي تتمم مع **أَ** – بالفتحة– عالم المقال واحدا ، و عليه يمكننا أن نرمز إلى التعبير" **س** ليست **أ** " بالصيغة " س ¬ ∈ أ" ، و يمكن بذلك تعريف أَ على النحو التالي :

أَ = س ¬ ∈ أ تعريف .

و على أساس هذا التعريف يكون لدينا التكافؤ التالي : س ∈ أَ ↔ س ¬ ∈ أ.

و من الملاحظ هنا أنّه من الممكن أن يكون هناك تطابق بين التعبيرات الخاصة بالدوال و التعبيرات الخاصة بالفئات ، و يمكن التعبير عن ذلك على هيئة تكافؤات ، و في حالة الفئة المنفية يكون لدينا مايلي:

¬ تا(س) ↔ س ¬ ∈ أ

↔ **س** ¬ ∈ أ

↔ **س** ∈ أَ

و معنى هذه التعبيرات كما يلي: القول أنّ من الخطأ **س** هو **تا** يكافئ القول بأنّ **س** ليست عضوا في الفئة المحددة بـ **تا**، و يكافئ أيضا القول بأنّ **س** ليست عضوا في أ ، و يكافئ كذلك القول بأنّ س عضو في **لا أ** – أي أَ –

فإذا كانت **تا** تدل على إنسان فإنّ معنى التعبيرات السابقة تكون على التالي : من الخطإ أن يكون **س** إنسانا ، يكافئ القول بأنّ **س** ليس عضوا في الفئة التي يحوز أعضاؤها الصفة إنسان ، و يكافئ أيضا القول بأنّ **س** ليس عضوا في فئة الناس ، و يعني مرة أخرى أنّ **س** عضو في فئة الكائنات غير الإنسانية .

2- الضرب المنطقي [100]

إذا افترضنا أنّ الفئة أ هي فئة الأغنياء و أن الفئة ب هي فئة السعداء، و أردنا أن ننظر في الفئتين معا ، لوجدنا أمامنا أربع فئات فرعية و هي :

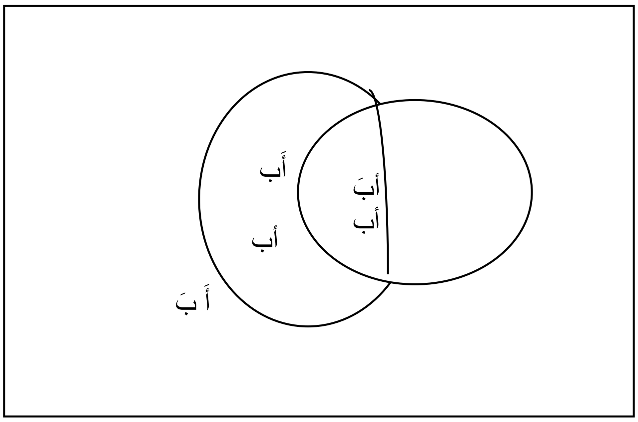
1/ فئة الأغنياء ولكنهم ليسوا سعداء.

2/ فئة الأغنياء السعداء.

3/ فئة من هم ليسوا بأغنياء ولكنهم سعداء.

4/ فئة من هم ليسوا بأغنياء ولا سعداء.

و تشكل الفئات الأرب هنا عالم المقال المكون من فئتين ، أي أننا سنكون أمام الفئات التالية "أ بَ" و "أ ب" و "أَ ب" و "أَ بَ " ؛ و إذا أردنا أن نعبر على ذلك بإستخدام أشكال " **فن** " – Venn – (نسبتا إلى المنطقي **فن**) فإننا نحصل على الشكل التالي :



و يطلق على الفئة التي ينتمي أعضاؤها إلى كل من الفئتين **أ** و **ب** اسم حاصل الضرب المنطقي للفئتين **أ** و **ب**، و هي الفئة " **أب** " المبينة في الشكل السابق و يطلق عليها الفئة الوصلية "∧ " و تسمى أحيانا بالفئة المشتركة classe commune لأن أعضاءها ينتمون إلى الفئة **أ** و الفئة **ب** معا . و سميت هذه العملية بالضرب المنطقي لأننا نقوم هنا بعملية شبيهة بعملية الضرب المألوف في الرياضيات ، ولذلك جاز لنا أن نرمز لحاصل ضرب الفئتين **أ** و **ب** بنفس الرمز الرياضي الدال على الضرب و هو" **أxب**" أو" **أب**".

و لما كان حاصل الضرب بين الفئتين يدل على أولئك الأفراد الذين ينتمون إلى الفئة أ و الفئة ب معا، فإننا نستطيع أن نقدم تعريفا لفئة حاصل الضرب المنطقي على الوجه التالي :

[100] محمد محمد قاسم مرجع سابق ص 303.

أxب = (س ∈ أ ∧ س ∧ ب)

س ∈ (أ x ب) = (س ∈ أ ∧ س ∈ ب).

و الجدير بالذكر هنا أن عدد أعضاء الفئة **أxب** – حاصل الضرب – أقل بوجه عام من عدد أعضاء كل من الفئتين أ و ب ، أو مساويا لأحدهما في بعض الحالات الاستثنائية ، وهذا من وجهة نظر ماصدقية ، أما في حالة المفهومية ، فالعكس هو الصحيح ، فقد تكون مساوية لأحدهما و لكنها لن تكون أصغر من أي منهما و على سبيل المثال :
لو كانت أ هي فئة الزهور و ب فئة الأشياء الحمراء ، و كانت أب هي فئة الزهور الحمراء ، لكان من الواضح أن أعضاء هذه الفئة الأخيرة أي أب أقل من الفئتين أ و الفئة ب لأنها لا تضم جميع الزهور و لا جميع الأشياء الحمراء و هذا من حيث الماصدق .

أما من حيث المفهوم فإنّ الفئة **أxب** تكون أكبر من الفئتين أ و ب ذلك أنّ مفهومهما هو نفسه مفهوم الزهور مضافا غليه مفهوم الأشياء الحمراء ، و يمكننا هنا أيضا التعبير عن التطابق الكائن بين التعبيرات الحاصلة بالدوال و التعبيرات الخاصة بالفئات على النحو التالي :

تا(س)∧ عا(س) ↔ (س∈ أ ∧ س ∈ ب)

↔ س ∈ (أ x ب) – أي س∈ أب –

و نستطيع الأن أن نقدم بعض النتائج التي تترتب على الضرب المنطقي للفئات و نكتفي بنتجتين اثنتين هما ك

- أ x ب = ب x أ
- أ x أ = أ

و قد أطلق المنطق البريطاني جورج بول Boole على عملية الضرب المنطقي بعملية الفرز و على الرموز اسم رموز الفرز ؛ و النتيجة التي نصل إليها بإجراء عملية الفرز مرتين أو أكثر من ذلك – بحسب بول – هي نفس النتيجة التي نصل غليها إذا ما أجرينا عملية الفرز مرة واحدة ، أي أنّ أ x أ = أ ،أو $أ^2$= أ ، و بصفة عامة **$س^ن$ = س** بحيث ن هي عدد المرات ، و عليه فإنّ الضرب المنطقي يختلف عن الضرب الرياضي في الجبر و الحساب الذي يكون فيه الضرب عملية مضاعفة نحو أ x أ = $أ^2$ أو أ x أ x أ = $أ^3$ و هكذا .

التضمن في الفئات :

المقصود بالتضمن احتواء فئة في فئة أخرى، بحيث يكون كل عنصر من عناصر الفئة الأولى هو عنصر في الفئة الثانية، فلو كانت جميع عناصر الفئة أ عناصر في الفئة ب لقلنا إن **أ متضمنة في ب**.

فالتضمن هو علاقة تقوم تقوم بين فئة وفئة فرعية منها، ومثال ذلك قولنا: " الكلاب أليفة "

يعني أن كل كلب، أو كل عنصر من عناصر فئة الكلاب، يمتاز بصفة معينة وهو كونه أليفا.

ولكن صفة " **الألفة** " لا تقتصر على الكلاب وحدهم، لأن هناك فئات من الحيوانات أكبر من فئة الكلاب تتصف بهذه الصفة، وما فئة الكلاب إلا فئة فرعية منها وعليه نستطيع القول أن: **فئة الكلاب متضمنة في فئة الكائنات الأليفة.**

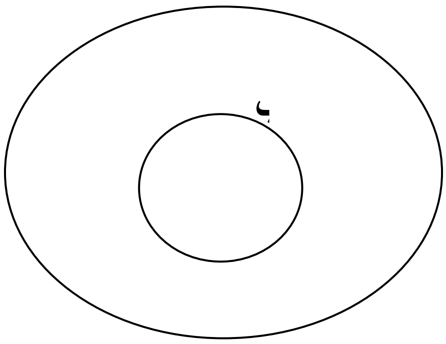
ونرمز للتضمن في الفئات بالرمز ⊂ ،فعندما تكون أ متضمنة في الفئة ب نكتبها على الشكل التالي: **أ ⊂ ب** وتُقرأ أ متضمنة في ب، أو نقول أ محتواة في ب، وهي تعبّر عن القضية الكليّة في المنطق التقليدي أ ⊂ ب هي كل أ هو ب

والانتماء ∈ يختلف عن ⊂ فلا نقول أن الفئة أ ∈ ب ،فالعلاقة بين الفئتين ليست علاقة عضوية ،عضوية فرد في الفئة التي ينتمي إليها ،بل هي علاقة تضمن فئة بأكملها في فئة أخرى والخلط بين الانتماء ∈ و الاحتواء ⊂ يؤدي إلى نوع خاص من التناقضات يُسميه المناطقة **أغاليط النمط** ، إذ أن الحالة التي تكون فيها الصيغة أ ⊂ ب صادقة ، قد تصدق فيها الصيغة أ ∈ ب و قد لا تصدق و العكس صحيح.

فقولنا أن القطط كفئة مثلا متضمنة في فئة الحيوانات ، إلا أنها ليست عضوا فيها ، أي أن كل قط حيواني ،ولكن فئة القطط ليست حيوان

و كذلك قولنا قريش قبيلة عربية ،يدل على أن قريش (مأخوذة كوحدة واحدة) عنصر في فئة القبائل العربية ، ولكنها ليست متضمنة في القبائل العربية ،لأننا لا يمكننا القول عن كل فرد فيها أنه قبيلة عربية .

* ويمكن التعبير عن التضمن بالشكل الآتي:



و يتضح هنا أنّ التضمن لا يتم إلا حينما يكون كل عضو

في الفئة أ هو عنصرا في الفئة ب أيضا ،وبعبارة أخرى إذا كان س عنصرًا من أ كان عنصرا في ب ، وهذا يصدق بالنسبة لجميع قيم س ،ونقول بعبارة أخرى:

أيا ما كانت قيمة س ، إذا كان س عنصرًا من الفئة أ كان س عنصرًا من الفئة ب أيا ما كانت قيمة س ،إذا كان س عنصرًا من الفئة أ كان س عنصرًا من الفئة ب أي:

(س) [س ∈ أ ⟵ س ∈ ب]

ملاحظة:

من الممكن أن يكون أ ⊂ ب و العكس ب ⊂ أ وهذا يعني أن أ و ب مشتركان في الأعضاء كلها وفي هذه الحالة تكون هوية بين أ و ب (أ = ب)

و يمكننا أن نعبّر باللغة الخاصة بالدّوال عن الفئات ، فالتضمن في الفئات يمثّل القضية الكليّة الموجبة في المنطق التقليدي ،ولذلك فإننا نستطيع استخدام اللّزوم للتعبير عن التضمن و بذلك تكون لدينا التكافؤات التالية:

(س) [تا (س) ⟵ عا (س)] ⟷ □ (س) [س ف (ف تا) ⟵ س ∈ ف(ف عا)

⟷ □ (س) [س ∈ أ ⟵ س ∈ ب]

⟷ أ ⊂ ب

الهوية بين الفئات L'identité :

المقصود بالهوية بين فئتين أن لكل من الفئتين العناصر نفسها ،بمعنى أن جميع أعضاء أية فئة منهما انها تشكّل جميع عناصر الفئة الأخرى.

فئة الأرملة ،وفئة المرأة التي مات زوجها فئتان متطابقتان أي بينهما علاقة **هوية** وكذلك الشأن بالنسبة لفئة " الإنسان " هي نفسها فئة "الحيوان الناطق."

* والهوية بلغة منطقية هي تلك العلاقة التي تصدق حينما تكون هناك دالتان محددتان تا (س) عا (س) تتحققان بنفس القيم ، أي حينما تتحقق كل من الدالتين بمجموعة واحدة من القيم.

فلو كانت الدالة تا (س) تدل على (س الإنسان) ، وعا (س) تدل على (س حيوان ناطق) لكان من الواضح هنا أن كلا من الدالتين تتحقق بنفس القيم ،إذا أن الأفراد التي يمكن أن توضع مكان (س) في كل من الدالتين حتى ينتج عن ذلك قضايا صادقة هي نفس الأفراد وهنا أفراد الناس ،فيقال في هذه الحالة أن هناك "هوية " بين الفئتين " الإنسان " و " الحيوان الناطق" .

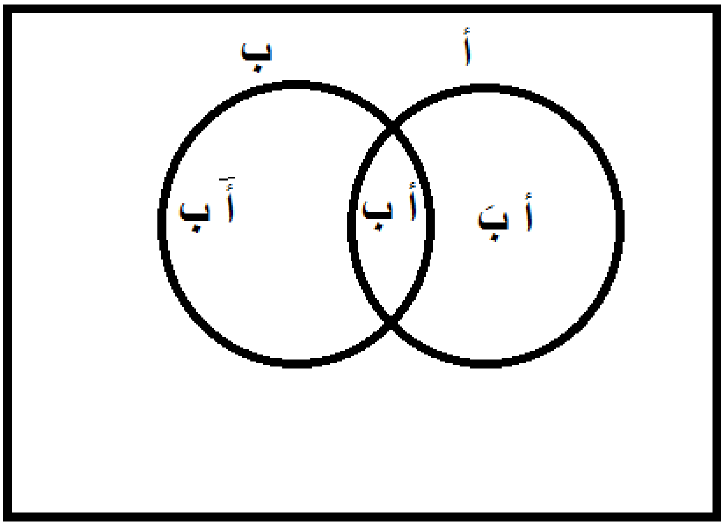
ويُشار إلى الهوية بين الفئات بالرمز الحسابي (=) فنكتب الهوية بين أ و ب على الوجه التالي أ = ب.

و الهوية في الفئات هي هوية ما صدقات وليس مفهومات

* و الهوية هي تضمن متبادل فتكون كل فئة متضمنة في الأخرى وبذلك يمكن تعريف الهوية على أساس التضمن على الوجه الآتي:

(أ = ب) ⟷ (أ ⊂ ب ∧ ب ⊂ أ) تعريف

و يمكن التعبير عن الهوية باستخدام شكل ڤن:



الأجزاء أ بَ و أ ب فئات خالية من الأعضاء

ويدل هذا الشكل على أن أي عضو في أ لابد أن يكون عضوًا في ب ، وكذلك فإن أي عضو في ب لابد أن يكون عضوًا في أ

ويمكننا أن نشتق أ = ب من اللغة الاصطلاحية للدوال على النحو التالي:

□ س [تا (س) ← عا (س)] ↔ [□ (س) س∈ ف (ف تا) ← س ∈ ف (ف عا)]

∧ [س ∈ ف (ف عا) ← س ∈ ف (ف تا)]

↔ □(س) [(س)∈أ ← س ∈ ب) ∧ (س← ∈ ب س∈أ)]

↔ أ □ ب

* ولعلاقة الهوية ثلاث خواص هي أولاً: أنها انعكاسية لأن الشيء يُساوي نفسه دائما

ثانيًا :هي تماثلية بمعنى إذا كانت أ مساويا لـ ب ، كان ب مساويًا لـ أ

وثالثًا : متعدية بمعنى إذا كان أ يساوي ب ، ب يُساوي جـ لكان أ يساوي جـ

ويمكن التعبير عن هذه الخواص على الوجه التالي :

(1) أ □ ب ، (2) أ □ ب ∧ ب □ أ

(3)[(أ □ ب) ∧ (ب □ جـ)] ← (أ □ جـ)

أما عدم الهوية بين الفئات أي عدم وجود عضوية مشتركة للفئتين نرمز لها ب أ ≠ ب و معناه أن هناك فردًا واحدا على الأقل غير مشترك بينهما ،أو بعبارة أكثر دقة لا تكون هناك هوية بين الفئتين أ ،ب إذا كان : هناك عضو واحد على الأقل من أعضاء أ ليس عضوًا في ب

- أو هناك عضو واحد على الأقل من أعضاء ب ليس عضوا في أ
- أو هناك عضو واحد على الأقل في كل منهما ليس عضوًا في الأخرى

ويمكننا أن نلخّص هذه الحالات الثلاث بلغتنا الرمزية على النحو التالي:

E (س) [س ∈ أ ∧ س ¬ ∈ ب] ∨ E (س) [س ∈ ب ∧ س ¬ ∈ أ]

الفئة الشاملة و الفئة الفارغة:

يمثّل عالم المقال الفئة الشاملة و تناظر الفئة الشاملة فكرة الجنس عند أرسطو ،إذا أنه (أي الجنس) يضم أنواعًا ،والجنس و الفئة الشاملة يمثلان الفئة و الفئة المتمة.

و يُرمز للفئة الشاملة بالرمز 1 (واحد) أي أن الفئة و الفئة المتممة لها تشكلان عالم مقال واحد .

فمثلاً الكائنات البشرية و الكائنات غير البشرية تشكل جميع المخلوقات

أ يمثّل فئة البشر، و أَ تشكّل فئة المخلوقات الأخرى.

أ + أَ □ 1 و عليه فإنه مهما يكن س فإن س عنصر من 1

□ (س) س ∈ 1 ، و يمكن قراءتها أن س عنصر في 1 قول صادق دائما أو قل بالنسبة لأي فرد فإن هذا الفرد عنصر في 1

إذ أن هذا الفرد لا بد أن يكون إمّا في (أ) أو(أَ) ومعنى ذلك أن الفئة الشاملة يمكن أن تتحدد بالدالة.

□ (س) [تا (س) ∨ ¬ تا (س)] وتعني أن س إمّا أن يكون تا أو ليس تا ،قول صادق بالنسبة لجميع قيم س ، وعلى ذلك تكون لدينا التكافؤات التالية:

□ (س) [تا (س) ∨ ¬ تا (س)] ↔ □ (س) [س ∈ أ ∨ س ∈ أَ]

↔ □ (س) س ∈ (أ + أَ)

↔ أ + أَ □ 1

أمّا الفئة الفارغة : فهي تلك التي تخلو من الأعضاء ،فيكون أعضاؤها صفرًا (0) ففئة المربع المستدير ،فئة خالية من أعضاء لأنها تجمع بين خواص لا يمكن اجتماعها معًا (المربّع و الدائرة) فالأشكال التي تجمع بين كونها مربعة و مستديرة لا وجود لها أي تساوي صفرًا.

فالفئة الفارغة هي الفئة التي تخلو من الما صدقات (الأعضاء) أي هي فارغة من الأعضاء أي ليست فئة على الحقيقة ويمكن تبرير وجود الفئة الفارغة باللجوء إلى فكرة عالم المقال فلكل فئة فئة متمة حتى نكوّن عالم المقال

عالم المقال = فئة + فئة متممة لها

إن هذا التبرير يقوم على فرض أن هناك خاصية م عيّنة تا تتصف بها مجموعة من الأفراد ولتكن مثلاً خاصية الإنسان ، الملاك ...

ويستلزم وجود هذه الخاصية تا وجود فئة (فارغة أو ذات أعضاء) متمة تحدد بها ،وبالمثل يستلزم وجود ¬ تا الفئة المتمة لها.

* □ (س) [تا (س) ⟵ تا (س)]

يمكن قراءتها بالنسبة لجميع قيم س ،إذا كانت س متصفة بالصفة تا كانت متصفة بالصفة تا

فإذا كانت تا تعني صفة إنسان كان معنى هذه الصيغة:

بالنسبة لأي كائن إذا كان هذا الكائن إنسانًا كان إنسانًا ، ومعنى ذلك مرة أخرى أن ليس هناك فرد يجمع بين كونه إنسانًا و غير إنسانًا .

أي: ¬ (E س) [تا (س) ∧ ¬ تا (س)]

↔ ¬ (E س) (أ × أ′)

↔ أ × أ □ ∅ (مجموعة خالية) فئة خالية.

وبذلك تكون هناك هذه الفئة أ × أ هي فئة خالية من الأعضاء ونُلاحظ هنا أن تعريف الفئة الفارغة تكون مطابقة للفئة المتمة للفئة الشاملة

أ + $\overline{\text{أ}}$ □ صفر

أ × أ □ صفر

و نلاحظ هنا أن تعريف الفئة قد تم على وجهين يؤديان لنفس التعريف بصيغتين رمزيتين مختلفتين ،على الوجه الأوّل ، تكون الفئة الفارغة مطابقة للفئة المتممة للفئة الشاملة :

$\overline{\text{أ + أ}}$ = صفر

فما دامت الفئة الشاملة أ × أَ إنمّا تضم جميع الفئات المناسبة ذات الأعضاء ،فتكون الفئة المتممة لها وهي الفئة الفارغة مطابقة للشيء أي الصفر ،أمّا على أساس الوجه الثّاني فتكون الفئة الفارغة المطابقة لحاصل ضرب أي فئة ، والفئة المتممة لها مما هو مشترك بين أية فئة و متمتها لا وجود لها أي أ × أ = صفر

فالتعريف الأوّل قد تم على أساس الجمع المنطقي وثم الثاني على أساس الضرب المنطقي ولعّل من الملاحظ أن الصيغتين متكافئتان حسب قواعد دومورغان التي رأيناها في حساب القضايا.

ونستطيع الآن أن نعبّر عن الفئة الفارغة باللغة الاصطلاحية للدوال و ما يناظر ذلك في اللغة الاصطلاحية للفئات على الوجه التالي:

¬ E (س) [تا (س) ∧ ¬ تا (س)] ↔ ¬ E (س) [س ∈ أ ∧ س ∈ أَ]

↔ ¬ E (س) [س ∈ أ × أَ]

↔ أ × أَ = صفر

ملاحظة:

إن كلا من الفئة الفارغة و الفئة الشاملة هما فئة فريدة أي ليس هناك أكثر من فئة فارغة واحدة ، وليس أكثر من فئة شاملة واحدة.

قاعدتا دومورغان :

و هما قاعدتان وُضعتا أساسًا للفئات وليس لحساب القضايا ، وتُعبّر القاعدتان على العلاقة بين الجمع المنطقي و الضرب المنطقي.

القاعدة الأولى : (أ × ب) □ أً + بً

و تُقرر هذه القاعدة أن الفئة الناتجة عن حاصل ضرب فئتين تكون مساوية للفئة الناتجة عن حاصل جمع الفئتين المتممتين للفئتين الأصليتين ، ولما الضرب يقابل (∧) في دوال الصدق و الجمع يقابل (∨) في دوال الصدق فهذه القاعدة هنا تعني نفس ما تعنيه القاعدة المناظرة لها في دوال الصدق ، وهي أن :

¬ (ق ∧ ل) ↔ ¬ ق ∨ ¬ ل

وبذلك يمكن التعبير عن هذه القاعدة في الفئات على النحو التالي:

نفي حاصل الضرب لأي فئتين يساوي حاصل جمع نفي هاتين الفئتين .

القاعدة الثانية :

(أ + ب) = أً + بً

وتقرر هذه القاعدة أن الفئة المتممة لحاصل جمع فئتين تكون مساوية للفئة الناتجة عن حاصل ضرب الفئتين المتممتين للفئتين الأصليتين ،وهذه القاعدة تُناظر المناظرة لها في دوال الصدق وهي أن الانفصال المنفي يكافئ و صلا له حجتان منفيتان ، أي:

¬ (ق ∨ ل) ↔ ¬ ق ∧ ¬ ل

ويمكن التعبير عن هذه القاعدة في الفئات على النحو التالي:

نفي حاصل الجمع لأي فئتين يساوي حاصل ضرب نفي هاتين الفئتين

الفئات و الاستدلال القائم على أساس القضايا الحملية :

بعد أن فرغنا من تحديد الفئة الفارغة والفئة ذات الأعضاء تمكّنا أن نعبّر عن جميع القضايا الحملية على أساس هاتين الفئتين كما يمكننا أيضًا القيام بجميع عمليات الاستنباط في المنطق الأرسطي القائم على أساس هذه القضايا ، وسبيلنا الآن إلى التعبير عن هذه القضايا على أساس الفئات ، والتعبير عنها عن طريق أشكال **(ڤن)**

□– القضية الكليّة الموجبة كل أ هو ب

وتعبّر هذه القضية عن التضمن بالمعنى الذي عرضناه من قبل و لذلك فهي تعني

(1) □ (س) [س ∈ أ ⟵ س ∈ ب]

ومعنى ذلك أنّ إذا كان س عضوًا في أ لزم عن ذلك أنه عضو في ب ، ومعنى ذلك أنه لا يمكن أن يكون هناك عضو في أ وليس عضوًا في ب و يمكن التعبير عن ذلك بالصيغة التالية المكافئة للصيغة السابقة

(2) ¬ E (س) [س ∈ أ ∧ س ∈ بَ]

وهذه الصيغة بدورها تكافئ القول بأن ليس هناك فرد ينتمي إلى حاصل ضرب الفئتين أ ، بَ أي

(3) ¬ E (س) س ∈ أ × بَ

وهذه الصيغة تكافئ إذن

(4) أ بَ □ صفر

ولنضرب مثال على ذلك:

كل إنسان فان

(1) الصيغة الأولى : بالنسبة لأي فرد إذا كان هذا الفرد منتميا إلى الناس كان منتميا إلى الفانين.

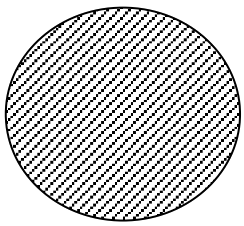
(2) لا يمكن أن يكون فرد إنسان و يكون غير فان

أي (3) لا وجود لفرد يكون إنسانًا غير فان

أي (4) أن فئة الإنسان الذين هم ليس فانين فئة فارغة من الأعضاء (غير موجودة)

أما عند التعبير عن القضية و القضايا الحملية الأخرى عن طريق شكل **ڤن** ، فيقتضي منّا أن نشير إلى الأساس الذي يقوم عليه هذا الشكل .

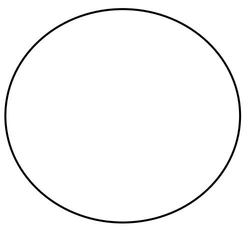
يقوم شكل ڤن على أساس تمثيل كل فئة بدائرة و يكون تظليل الدائرة علامة عن كونها فئة فارغة ،فمثلاً:



أ

و إذا لم تكن الفئة فارغة ،أي كانت ذات أعضاء (وجودية) لا تُساوي صفرًا لكان التعبير عنها عن طريق شكل **ڤن** على الوجه التالي:

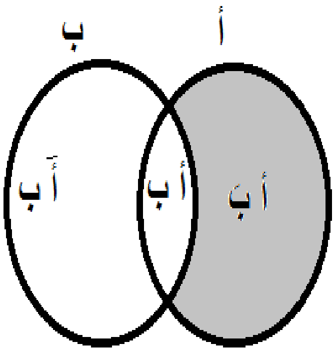
أ



أ

وجود س في الدائرة دليل على وجود عضو واحد على الأقل فيها وعلى أساس ذلك يكون التعبير عن القضية الكليّة الموجبة على النحو التالي

ويوضّح هذا الشكل أنّ الأفراد الذين ينتمون
إلى أ و لا ينتمون إلى ب لا وجود لهم أي أن
الفئة أ بَ فئة فارغة



II الكليّة السالبة : ليس أ في ب

أبَ =

مثال ذلك : لا إنسان خالد و معناها لا يمكن أن يكون هناك فرد يجمع بين كونه إنسانًا و كونه خالدا ،أي ليس هناك فرد ينتمي إلى كل من فئة الإنسان وفئة الكائنات الخالدة أي :

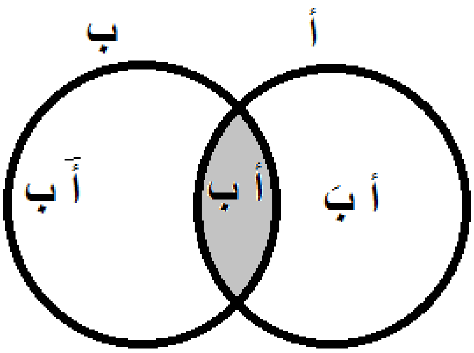
□ (س) [س∈أ ← س ∈ بَ]

(1) ¬ E (س) [س∈أ ∧ س ∈ ب]

وهذه الصيغة تكافئ

(2) ¬E (س) س ∈ أ ب ، أي أن فئة الإنسان الخالد لا وجود لأعضائها وهذه تكافئ

(3) أ ب = 0



و يدل هذا الشكل على أن الفئة التي يجمع أعضاؤها بين كونهم في أ ،ب معًا فئة فارغة

□ الجزئية الموجبة : بعض أ هو ب

لو قلنا بعض الورود حمراء لكان معنى ذلك أن هناك شيئًا واحدًا على الأقل ينتمي إلى فئة الورود وفئة الأشياء الحمراء أي :

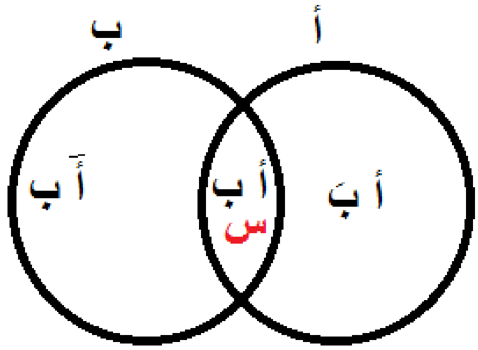
(1) E (س) (س ∈ أ ∧ س ∈ ب) وهذه الصيغة تكافئ

(2) E (س) (س ∈ أ ب)

أي أن هناك عنصرًا واحدًا على الأقل ينتمي إلى الفئة أ ب ،ومعنى هذا أن هذه الفئة ليست خالية من الأعضاء فهي لا تُساوي صفرًا أي:

(3) أ ب ≠ صفر

و يمكن التعبير عن هذه الصيغة عن طريق شكل **فن** على النحو التالي:



أ ب ≠ صفر

□ الجزئية السالبة : بعض أ ليس هو ب

لو كانت لدينا القضية " بعض الكتب ليست مفيدة "

لكان معناها أن هناك شيئًا واحدًا على الأقل يمكن أن يجمع بين كونه كتابًا و كونه غير مفيد أي أنه ينتمي إلى الفئتين أ ، بَ أي:

(1) E(س) [س ∈ أ ∧ س ∈ بَ]

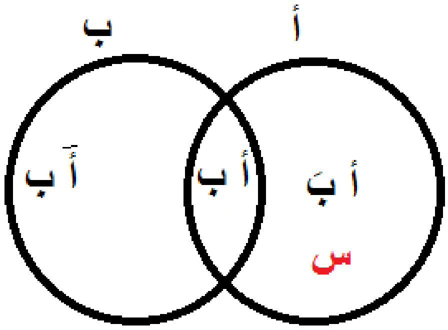
و تعني هذه الصيغة أن هناك فردًا على الأقل ينتمي إلى الفئة أ بَ أي :

(2) E(س) [س ∈ أ بَ]

وتعني هذه الصيغة أن الفئة أ بَ ليست فارغة من الأعضاء وبذلك تكون مكافئة للصيغة التالية:

3) أ بَ ≠ صفر

و باستخدام شكل ڤن يمكن التعبير عن هذه الصيغة على الوجه التالي:



أ بَ ≠ 0

الاستدلال المباشر عن طريق التقابل بين القضايا:

نبدأ أولاً بتلخيص ما يقوله المنطق التقليدي بشأن هذا النوع من الاستدلال:

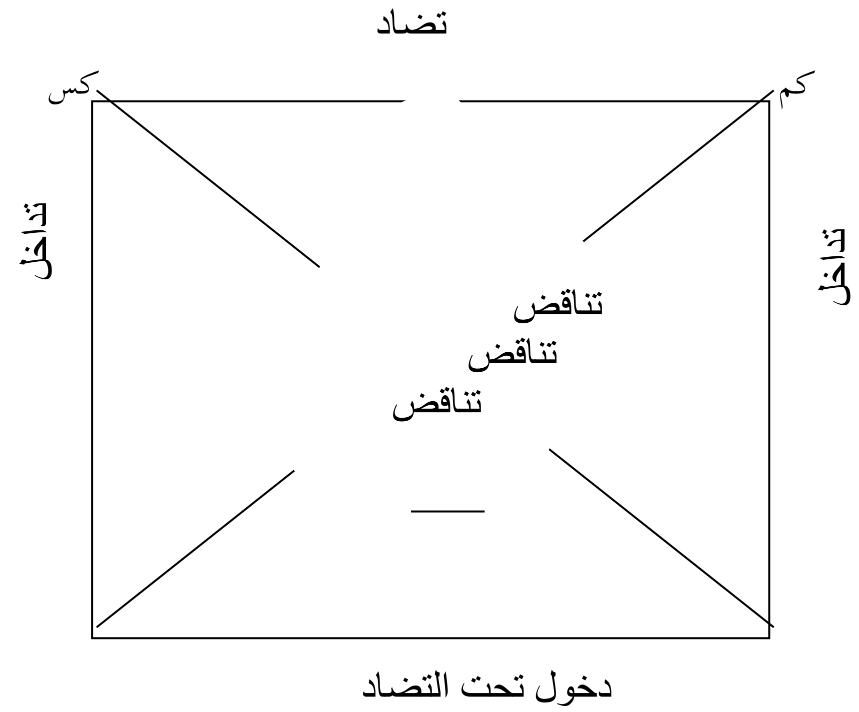
-التضاد: ويكون بين الكليّة الموجبة و السالبة ،والقضيتان المتضادتان لا تصدقان معًا وقد تكذبان معًا ،فصدق احداهما يستلزم كذب الأخرى ،أمّا كذب احداهما فلا يلزم عنه صدق الأخرى أو كذبها.

-التناقض : ويكون بين الكلية الموجبة والجزئية السالبة ،و بين الكلية السالبة والجزئية الموجبة والقضيتان المتناقضتان لا تصدقان معًا ،ولا تكذبان معًا

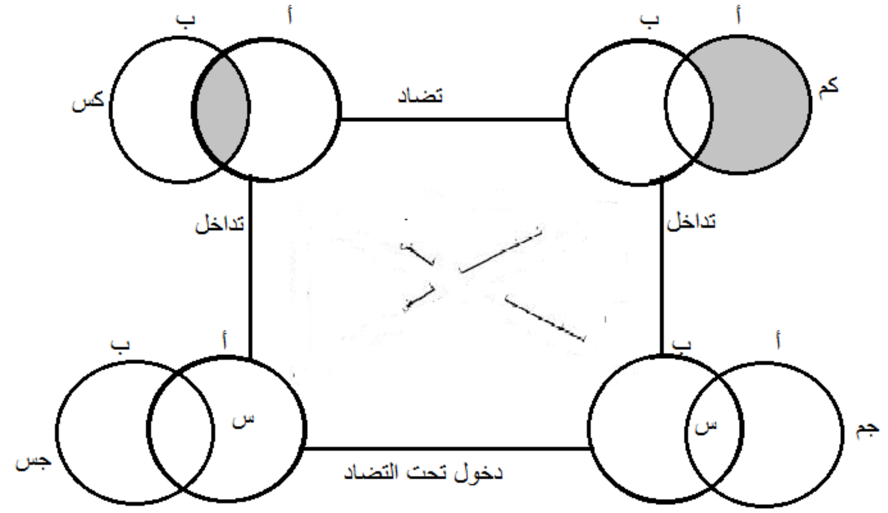
-التداخل: ويكون بين الكلية الموجبة و الجزئية الموجبة ، وبين الكلية السالبة والجزئية السالبة وفي هذه العلاقة يكون التسليم بصدق القضية ملزمًا بصدق الجزئية المتداخلة معها ،أما كذبها فلا يلزم عنه صدق الجزئية و لا كذبها ، وكذب الجزئية يكون ملزمًا بكذب الكلية ،أما صدق الجزئية فلا يلزم عنه صدق الكلية أو كذبها.

-الدّخول تحت التضاد: ويكون بين الجزئيتين و هاتان القضيتان لا تكذبان معًا ،ولكن قد تصدقان معًا بمعنى إذا كذبت احداهما صدقت الأخرى ،أما صدق احداهما فلا يلزم عنه كذب الأخرى أو صدقها.

هذا ما تقول به وجهة نظر المنطق القديم ، وهو ما يعرف بمربّع التقابل



أمّا من وجهة النظر الحديثة فلا تتفق و جميع هذه الاستدلالات فيما عدا علاقة التناقض ولكي نتبيّن وجهة النظر الحديثة ،نعيد رسم مربّع التقابل على أساس أشكال ڤن على النحو التالي:



تـ

و الآن إذا ما تأملنا هذا المربع تبيّن لنا في حالة التناقض أن الجزء أ بَ في كم فئة فارغة بينما في القضيّة المناقضة لها وهي جس فئة ذات أعضاء ،فيكون من الواضح أن صدق كم يستلزم كذب جس والعكس في ذلك صحيح وكذلك فإن كذب كم يستلزم عنه صدق جس ،والعكس في ذلك صحيح ومثل هذا يصدق بالنسبة للقضيتين المتناقضتين كس / جم لأن الفئة أ ب في كس فئة فارغة بينما هي في جم ذات أعضاء ، ولذلك كان صدق أيهما

يستلزم كذب الأخرى وكذب احداهما يستلزم صدق الأخرى ، وعلى ذلك تكون لدينا في حالة التناقض الاستدلالات الصحيحة التالية:

(1) أ بَ□ صفر ← ¬ (أ بَ ≠ صفر)

(2) أ بَ ≠ صفر ← ¬ (أ بَ = صفر)

(3) أ ب □ صفر ← ¬ (أ ب ≠ صفر)

(4) أب ≠ صفر ← ¬ (أ ب □ صفر)

(5) ¬ (أ ب □ صفر) ← أ بَ ≠ صفر

(6) ¬ (أ بَ ≠ صفر) ← أ بَ □ صفر

(7) ¬ (أ ب □ صفر) ← أ ب ≠ صفر

(8) ¬ (أ ب ≠ صفر) ← أ ب □ صفر

أمّا بقية الأنواع الأخرى من العلاقات الموضحة في مربّع التقابل فهي ليست يقينية،و يرجع السبب في ذلك إلى أن الفئة أ قد تكون فارغة ،فإذا لم يتم الإقرار بأنها فئة ذات أعضاء ،كانت جميع هذه الاستدلالات غير يقينية ولنقف قليلا لتوضيح هذا القول بالنسبة لكل نوع على حدة

أ) التضاد : نلاحظ أن المنطق التقليدي يقرر صحة الاستدلالين التاليين :

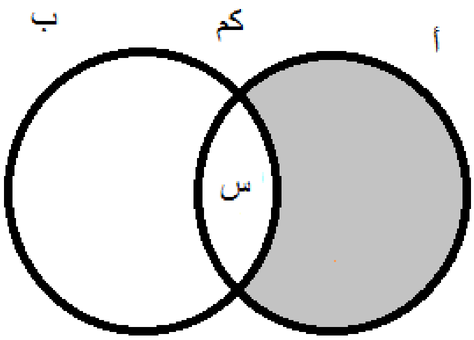
1- أ بَ □ صفر ← ¬ (أ ب □ صفر)

2- أ ب □ صفر ← ¬ (أ بَ □ صفر)

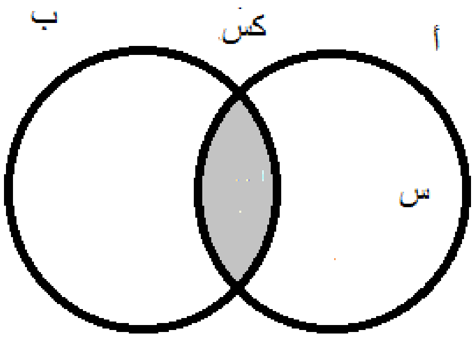
ولكن وجهة نظر المنطق الرمزي الحديث لا تُقر صحة هذين الاستدلالين (إذا كان ...كان) فإن القضيتين المتضادتين تتساويان من حيث الصدق و الكذب ، فهما قد تصدقان معًا و قد تكذبان معًا ،وبالتالي لا يمكن أن يلزم عن صدق احدهما كذب الأخرى بالضرورة.

ويظهر هذا الأمر واضحًا من مربع التقابل السابق وأشكال **ڤن** ، فإن كم لا تقرر سوى أن الفئة أ بَ فئة فارغة ،و لا تقرر شيئًا بشأن الفئة أ ب ، وتتركنا أمام احتمالين إما أن تكون فئة فارغة أو تكون ذات أعضاء ، بينما تقرر كس أحد هذين الاحتمالين فقط و هو أن الفئة أ ب فئة فارغة فإذا سلمنا بصدق كم لما كان في استطاعتنا أن نستدل بالضرورة على كذب كس لأنها قد تكون كاذبة و قد لا تكون وبذلك تكون الصيغة (1) يقينية وكذلك يقال الشيء نفسه عن الصيغة (2).

ولكي نجعل كلا من الاستدلالين 1،2 صحيحًا لا بد لنا أن نضيف إلى المقدّم في كل منهما أن أ فئة ذات أعضاء ،و لو أردنا أن نعبّر عن كم و كس بعد هذه الإضافة عن طريق شكل ڤن لكان ذلك على الوجه التالي:



أ بَ = صفر ∧ أ ≠ صفر



أ ب = صفر ∧ أ ≠
صفر

فمن الواضح من هذين الشكلين أن افتراض صدق كم يستلزم كذب كس ،لأن الفئة أ بَ في كم فئة فارغة ،بينما هي في كس ليست فارغة ،و يتضح أيضا أن صدق كس يستلزم كذب كم لأن الفئة أ ب في كس فئة فارغة بينما هي في كم فئة ذات أعضاء ،وعلى ذلك فإن الاستدلالين (1) (2) لا بد من إعادة صياغتهما:

1- [أ بَ □ صفر ∧ (أ ≠ صفر)] ← ¬ (أ ب □ صفر)

2- [أ ب □ صفر ∧ (أ ≠ صفر)] ← ¬ (أ بَ □ صفر)

و نكون بذلك إزاء صيغتين تعبّر كل منهما عن استدلال صحيح.

(ب) التداخل : يقّر المنطق التقليدي هنا بصحة الاستدلالات الأربعة السالبة:

(1) (أ بَ □ صفر) ← (أ ب ≠ صفر)

(2) ¬ (أ ب ≠ صفر) ← ¬ (أ بَ □ صفر)

(3) (أ ب □ صفر) ← (أ بَ ≠ صفر)

(4) ¬ (أ بَ ≠ صفر) ← ¬ (أ ب □ صفر)

كل هذه الأشكال لا تدل على أن الاستدلالات يقينية ما لم نفترض مقدّمًا أن أ فئة ذات أعضاء فتصبح:

1- [أ بَ □ صفر ∧ (أ ≠ صفر)] ← (أ ب ≠ صفر)

2- [¬ (أ ب ≠ صفر) ∧ (أ ≠ صفر)] ← ¬ (أ بَ □ صفر)

3- [(أ ب □ صفر) ∧ (أ ≠ صفر)] ← أ بَ ≠ صفر

4- [¬ (أ بَ ≠ صفر) ∧ (أ ≠ صفر)] ← ¬ (أ ب □صفر)

(ج) الدخول تحت التضاد: و يقرر المنطق التقليدي بشأن هذه العلاقة الاستدلالات التالية:

(1) ¬ (أ ب ≠ صفر) ← أ بَ ≠ صفر

(2) ¬ (أ بَ □ صفر) ← أ ب ≠ صفر

إلا أن هذين الاستدلالين غير يقينين من وجهة نظر المنطق الرّمزي الحديث ،ولا يمكن أن يصبح الاستدلال صحيحًا ما لم تكن أ فئة ذات أعضاء و لا بد من تقرير ذلك صراحة.

وعليه يكون لدينا الاستدلالين التاليين:

1- [¬ (أ ب ≠ صفر) ∧ (أ ≠ صفر)] ← أ بَ ≠ صفر

2- [¬ (أ بَ ≠ صفر) ∧ (أ ≠ صفر)] ← أ ب ≠ صفر

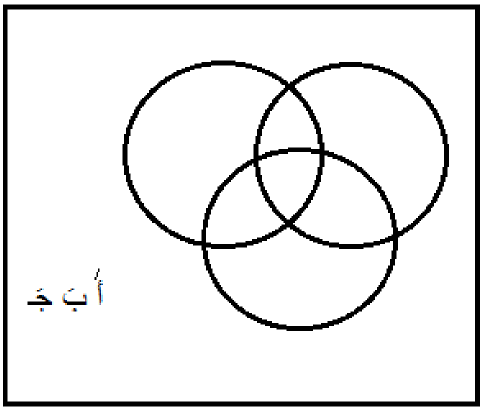
الفئات و القياس:

شكل ڤن :

لما كان القياس مؤلفًا من ثلاث فئات ،فنحن في حاجة إذن إلى ثلاث دوائر تمثّل كل دائرة فئة من هذه الفئات و ستكون هذه الدوائر متقاطعة حتى يمكن تصوير العلاقة بين الفئات الثلاث.

و المبدأ العام الذي يقوم عليه شكل ڤن هو أن التعبير عن المقدّمتين في القياس الصحيح لا بد أن يتضمن التعبير عن النتيجة ،أما التعبير عن المقدّمتين في القياس الفاسد فلا يلزم عن التعبير عن المقدّمتين التعبيرعن النتيجة.

وبعبارة أخرى ، إذا ما أمدنا التعبير عن المقدّمتين بالتعبير عن النتيجة ،لكانت النتيجة مستنبطة استنباطا صحيحًا من المقدّمتين ، وبالتالي يكون القياس صحيحًا ،وإلا لكان فاسدا والآن لو رسمنا هذه الدوائر الثلاث المتقاطعة التي تمثّل الحدود الثلاثة أ، ب ،جـ ، لنتج عن ذلك سبعة أجزاء بالاضافة إلى جزء ثامن خارج الدوائر.



أما عن طريقة استخدام هذا الشكل في التحقق من صحة الأقيسة فإن بعض الأمثلة كفيلة بإظهاره ،فلنفترض أنه لدينا القياس التالي:

مثال:

كل ما ينمي الفكر فهو مفيد : كل أ ب

كل الكتب تنمي الفكر : كل جـ أ

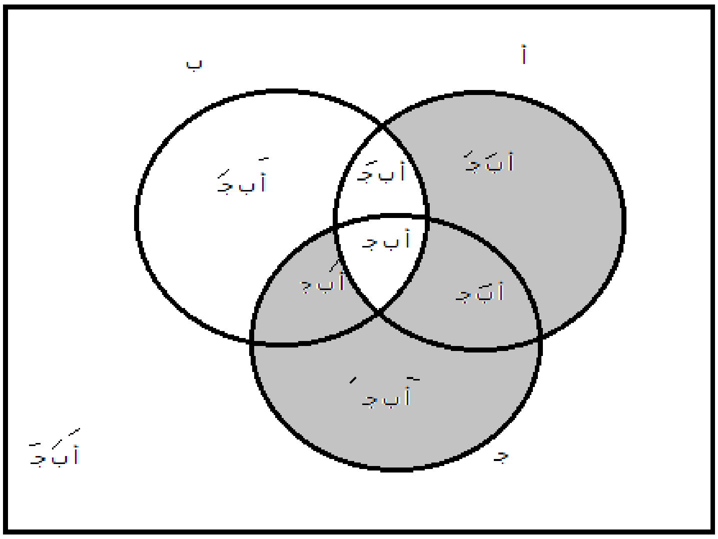
إذن كل الكتب مفيدة : كل جـ ب

وفي لغة الفئات نحصل على التالي:

أ بَ = 0

جـ أ = 0

جـ بَ = 0



و عندما نُلاحظ الشّكل ۿن فإننا نجد أن نتيجتنا قد تم التعبير عنها في الشكل إذ أنها تقول أن الفئة بَ ج فئة فارغة و بذلك تكون النتيجة لازمة عن المقدّمتين و يكون القياس صحيحًا و بالنظر إلى شكل ۿن بأجزائه السبعة المحصورة في الدوائر ،نستطيع أن نقدّم برهانًا على صحة هذا القياس ،لأننا نلاحظ أن كل قضية من قضايا القياس الثلاث ،لا بد أن تشكل جزئين من الأجزاء السبعة.

يضم الجزء الأوّل الفئتين بصورتهما التي تقررها القضية بالإضافة إلى الفئة الثالثة في حالة الإيجاب ،ويضم الثاني نفس الفئتين بالإضافة إلى الفئة الثالثة في حالة السلب و لتوضيح ذلك نعود إلى قياسنا السابق لنجد أن المقدّمة الكبرى تقول أ بَ = 0 ، وهنا نُلاحظ أن الجزئين اللذين تشغلهما هذه المقدّمة لا بد أن نقرر كل منهما أ بَ ،و كل ما هنالك أننا نجد الفئة الثالثة التي لم تذكرها المقدّمة وهي ج ترد موجبة في جزء و سالبة في الجزء الآخر و بذلك تكون :

أ بَ □ أ بَ ج + أ بَ جَ □ 0

ونفس الشيء بالنسبة للمقدّمة الصغرى جَ أ □ 0

- جـ أَ □ جـ أ بَ + جـ أ بَ □ 0

و تكون النتيجة على نفس الطريقة

جـ بَ = 0 : جـ بَ□ جـ بَ أ + جـ بَ أَ □ 0

وعلى أساس ذلك نستطيع أن نقدّم للقياس السابق البرهان التالي القائم على أساس شكل ۿن

لدينا : أ بَ □ أ بَ جـ + أ بَ جَ □ 0

إذن : أ بَ جـ □ 0 ...(1)

ولدينا :جـ أَ□ جـ أ بَ+ جـ أ بَ =□ 0

إذَن : جـ أ بَ □ 0 ...(2)

وبناءًا على (1) ،(2)

فإن أ بَ جـ + جـ أ بَ □ 0

و هي نفس النتيجة

جـ بَ □ جـ بَ أ + جَـ بَ أ □ 0

لنأخذ مثال آخر : وبلغة الفئات :

كل أ ب أ بَ □ 0

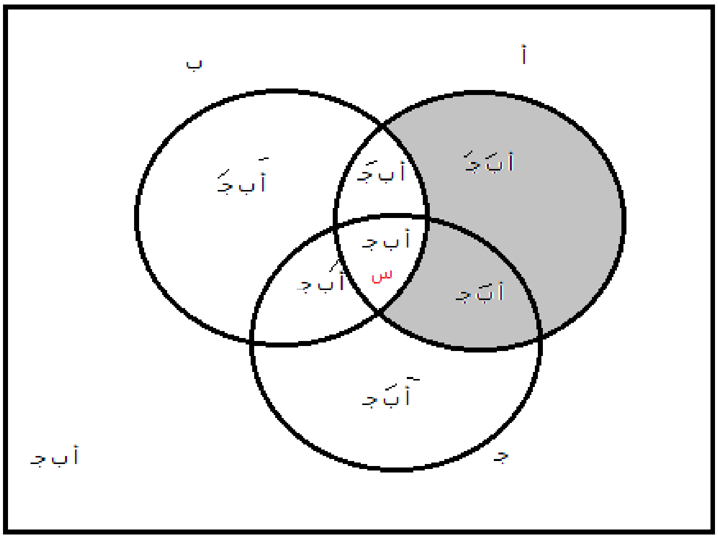
بعض جـ أ جـ أ ≠ 0

بعض جـ ب جـ ب ≠ 0

أ بَ □ أ بَ جـ + أ بَ جَـ □ 0

جـ أ □ أ ب جـ + أ بَ جـ ≠ 0

ب جـ □ أ بُ جـ + أ ب جـ ≠ 0



إذا كان أ بَ □ أ بَ جـ + أ بَ جَـ □ 0

أ بَ جـ □ 0

و إذا كان

جـ أ □ جـ أ ب + جـ أ بَ ≠ 0

إذن جـ أ ب ≠ 0

و إذا جمعنا : أ بَ جـ + جـ أ ب ≠ 0

وهي عبارة عن ناتج غير فارغ لأنه إذا كان جـ أ ب فئة ليست فارغة ،فالنتيجة إذن ليست فارغة :

$$\boxed{\text{جـ أ ب} \neq 0}$$

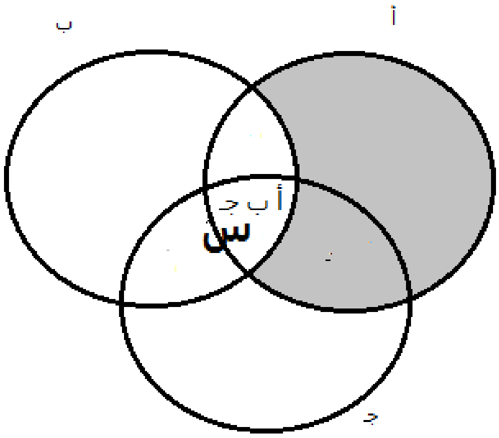
لنفترض القياس التالي:

ب هو جـ   ب جـ ≠ 0

كل أ هو ب   أ بَ □ 0   وهو قياس فاسد كما هو معروف

بعض أ هو جـ   أ جـ ≠ 0

(س) عنصر واحد على الأقل موجودة على الخط الفاصل بين هذين الجزئين لأنهما قد تكون في أي جزء منهما ، وإذا شئنا بعد ذلك أن نقرأ النتيجة في الشكل ،تعذّر علينا ذلك لأن صحة النتيجة تقتضي أن يكون الجزء أ جـ ب معبّرًا عن فئة ذات أعضاء ،لأن الجزء الآخر الذي يمثّل النتيجة أ بَ جـ فئة فارغة ،إلا أن الجزء أ ب جـ غير محدد فقد يمثل فئة ذات أعضاء وقد لا يُمثّل ذلك و لهذا القياس غير صحيح.



وإذا ما أردنا أن نتحقق من ذلك كان البرهان على الوجه التالي:

و المطلوب إثباته هو أن النتيجة أ جـ ≠ 0 ،أي:

أ جـ □ أ ب جَ + أ بَ جـ ≠0

وبما أن المقدّمة الصغرى تقرر أنّ:

أ بَ □ أ بَ جـ + أ بَ جَ □ 0

فإن أ بَ جـ = 0 وهو جزء من النتيجة

ولذلك ينبغي لصحّة النتيجة أن يكون الجزء الآخر و هو أ ب جـ منها فئة ذات أعضاء بالضرورة ، ولكن المقدّمة الكبرى تقرر أنّ

ب جـ □ أ ب جـ + أ ب جـ ≠ 0

و تعني هذه الصيغة أن احدى هاتين الفئتين على الأقل ذات أعضاء ، ولكننا لا ندري أي واحدة منهما ولا ندري أيضًا إن كانت كل منهما فئة ذات أعضاء أم لا ، ولذلك لا نستطيع الوصول إلى النتيجة بشكل يقيني ويكون قياسنا غير صحيح.

وهذا في الواقع برهان على صحّة الفاعدة القائلة بوجوب استغراق الحد الأوسط في إحدى مقدّمتي القياس على الأقل.

أ ب □ أ ب جَ + أ ب جـ □ 0

أ جـ □ أ ب جـ + أ بَ جـ ≠ 0

جـ بَ □ أ بً جـ + أ بَ جـ ≠ 0

أ ب جـ □ 0 ...(م1)

أ بَ جـ ≠ 0 ...(م2)

و النتيجة محققة مهما كانت قيَمة أ بَ جـ لأن أ بَ جـ ≠ 0

وعليه فالقياس صحيح.

مثال آخر:كل ب هو جـ   ب جَ □ 0

بعض أ هو ب   أ ب ≠ 0

بعض أ هو جـ   أ جـ ≠ 0

ب جَ □أ بَ جَ + أ ب جَ □0

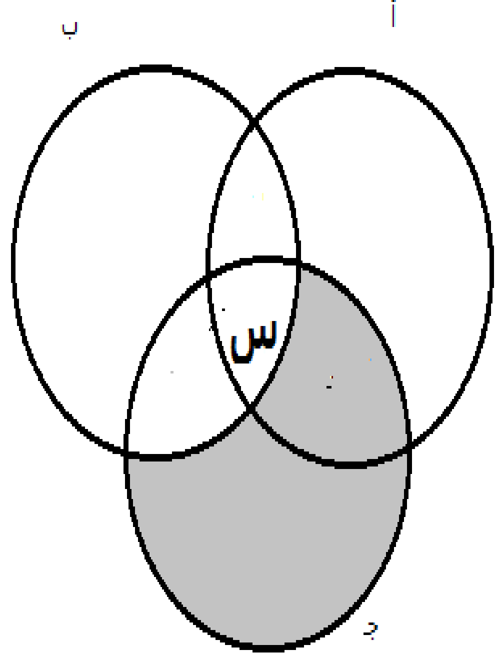
أ ب □أ ب جـ + أ ب جَ ≠ 0

أ جـ □ أ ب جـ + أ بَ جـ ≠ 0

أ ب جَ □ 0 ...(م1)

أ ب جـ ≠ 0 ...(م2)

النتيجة محققة مهما كان أ بَ جـ



وعليه فالقياس صحيح.

بعض الأمثلة للبرهنة على الأقيسة عن طريق حساب الفئات وشكل ڤن :

المثال الأوّل: الشكل الأوّل و الضرب الأوّل Barbara

كل فان حي: أ بَ □ 0 : أ بَ جـ + أ بَ جَـ □ 0

كل حيوان فان : جـ أَ □ 0 : أ ب جَـ + أ بَ جـ □ 0

كل حيوان حي : جـ بَ □ 0 : أ بَ جَـ + أ بَ جـ □ 0

* البرهان بشكل ڤن :

(أ بَ) فئة فارغة (مضللة)

و (أَ جـ) فئة فارغة (مضللة)

والنتيجة (بَ جـ) متضمنة في

المقدمتين (أبَ) و (أَ جـ) و المعبّر عنها

في الشكل بالمحيط الداكن.

و نلاحظ أن النتيجة متضمنة في المقدّمتين وعليه فإن هناك علاقة بين المقدّمتين والنتيجة وبالتالي القياس صحيح.

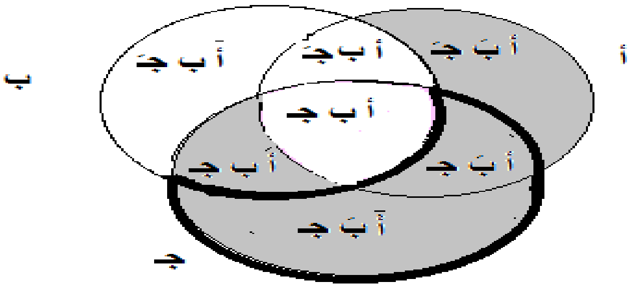
*البرهان بطريقة تحليل الفئات:

أ بَ جـ + أ بَ جَـ □ 0

أَ ب جـ + أَ بَ جـ □ 0

أ بَ جـ + أَ بَ جـ □ 0

أ بَ جـ □ 0 من المقدّمة الأولى



أَ بَ جـ □ 0 من المقدّمة الثانية

وعليه فإن جمعهما يساوي الصفر وبالتالي النتيجة محققة (أي تساوي الصفر في هذا المثال)

وعليه فالقياس صحيح.

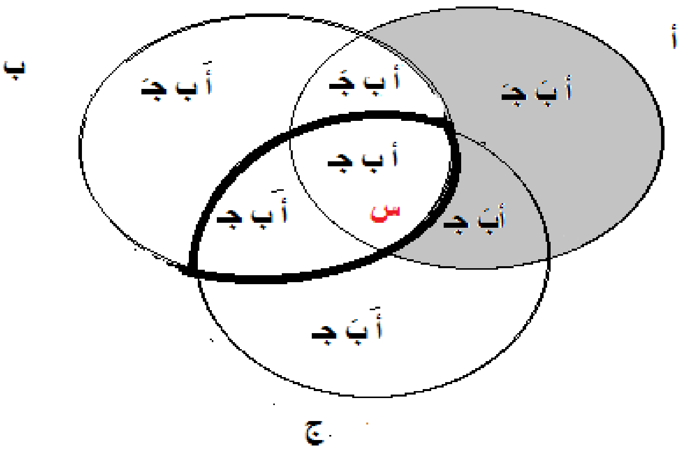
المثال الثّاني: الشكل الأوّل الضرب الثالث Darii

كل الفلاسفة مفكّرون　　　أ بَ □ 0

بعض العلماء فلاسفة　　　جـ أ □ 0

بعض العلماء مفكّرون　　　جـ ب ≠ 0

شكل ڤن :



إذن : المقدّمة الأولى أ بَ فئة فارغة (مضللة)

المقدّمة الثانية أ جـ فئة ذات أعضاء (جزء مضلل وجزء يحتوي على عناصر س)

أما النتيجة ب جـ فإنها متضمّنة جزئيا في المقدّمة الثانية (وهي المعبر عنها بالمحيط الداكن) وعليه فإن القياس صحيح لوجود علاقة بين المقدّمات والنتيجة.

تحليل الفئات :

أ بَ □ 0 : أ بَ جـ + أ بَ جـَ □ 0

جـ أ □ 0 : أ ب جـ + أ بَ جـ ≠ 0

جـ ب = 0: أ بَ جـ + أ ب جـ ≠ 0

أ ب جـ □ 0 من المقدّمة الأولى

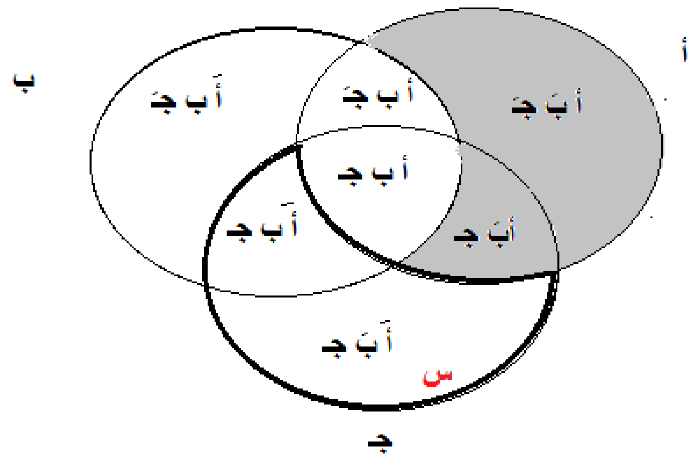
أ ب جـ ≠ 0 من المقدّمة الثانية

و مادام الأمر كذلك فإن النتيجة أ ب جـ′+ أ ب جـ **لا تساوي**الصفر مهما كانت قيمة أ ب′ جـ باعتبار أن أ ب جـ لا يساوي الصفر ، أي أن النتيجة محققة (في هذا المثال لا تساوي صفرا) وعليه يكون القياس صحيحًا.

المثال الثالث: الشكل الثاني الضرب الرابع Baroco

كل الورود جميلة الشكل :	أ بَ = 0
ليس بعض هذه الزينة جميلة الشكل :	جـ بَ ≠ 0
ليس بعض هذه الزينة ورود :	جـ′ أ ≠ 0

شكل ڤن:



أ بَ (المقدّمة الأولى) فئة فارغة (مضللة)

بَ جـ (المقدّمة الثانية) فئة ذات أعضاء ،(جزء مضلل وجزء فيه أعضاء س)

أمّا اُلنتيجة أ جـ فإنها مُتضمنة في المقدّمة الثانية جزئيا (وهي التي يعبّر عنها في الشكل بالمحيط الداكن) وبالتالي القياس صحيح.

تحليل الفئات:

أ بَ = 0 : أ بَ جـ + أ بَ جـَ = 0

بَ جـ ≠ 0 : أ بَ جـ + أَ بَ جـ ≠ 0

أ جَـ ≠ 0: أ بُ جـ + أ بَ جـ ≠ 0

لدينا أ بَ جـ □ 0 من المقدّمة الأولى

أ بَ جـ ≠ 0 من المقدّمة الثانية

وعليه فإن النتيُجة أ ب جُـ + أ بَ جـِ □0 أي محققة لأن الطرف الثاني أ بَ جـ لا يساوي الصفر مهما كانت قيمة الطرف الثاني أ ب جـ ، وعليه فالقياس صحيح.

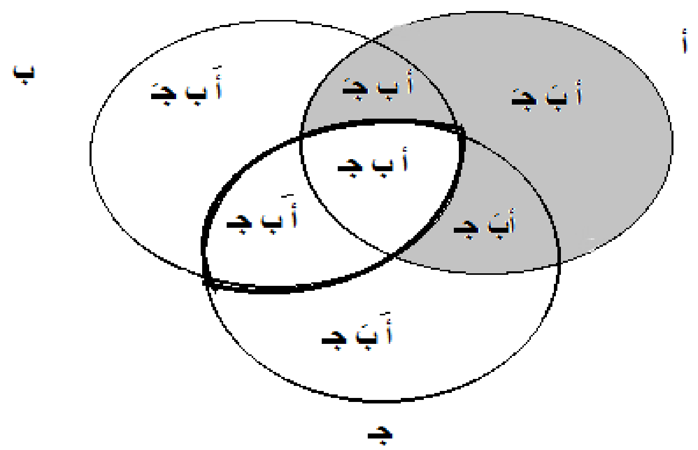
المثال الرّابع: الشكل الثالث الضرب الأوّل Darapti

كل العطور زكية الرائحة : أ بَ □ 0

كل العطور نباتية المصدر: أ جَـ □ 0

بعض ما هو نباتي المصدر زكي الرائحة : جـ ب ≠ 0

شكل ڤن :



نُلاحظ : أن المقدّمة الأولى أ بَ فئة فارغة (مضللة) ،والفئة أ جـَ وهي المقدّمة الثانية ،فئة فارغة (مضللة) كذلك وهي مشتركة مع جزء من المقدّمة الأولى (أ بَ جـ).

أمّا النتيجة ب جـ فهي فئة لا تربطها أي علاقة مع المقدّمتين (أ بَ) و (أ جـ) (وهي المعبّر عنها في الشكل بالمحيط الداكن) وعليه فالقياس فاسد من وجهة نظر المنطق الحديث.

تحليل الفئات:

أ بَ □ 0 : أ بَ جـ + أ بَ جـ □ 0

أ جـَ □ 0 : أ ب جـَ + أ بَ جـَ □ 0

جـ ب ≠ 0 : أ ب جـ + أ ب جـ ≠ 0

نُلاحظ أن عناصر النتيجة غير معطاة في المقدّمتين و عليه لا يمكن الجزم بقيم عناصر النتيجة أهي فئة فارغة أم ذات أعضاء ؟ أي هل تساوي الصفر أم لا تساوي الصفر وعليه فالنتيجة غير يقينية وبالتالي القياس فاسد من وجهة نظر نظرية الفئات.

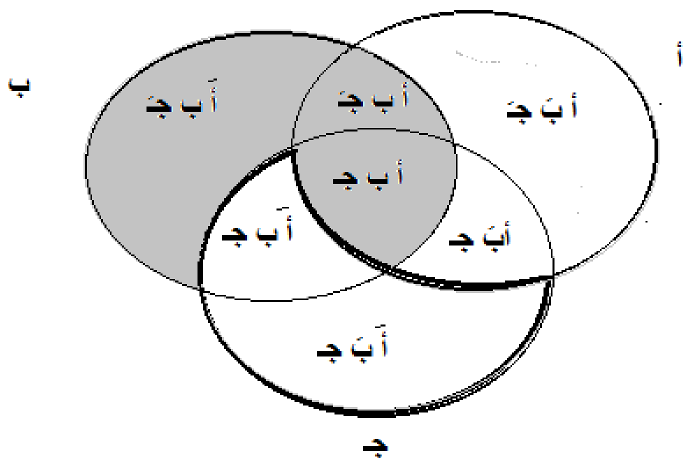
المثال الخامس : الشكل الرّابع الضرب الرّابع Fesapo

لا مجنون مُكلّف أ ب □ 0

كل مكلّف يُحاسب ب جـَ □ 0

ليس بعض من يحاسب بمجنون جـَ أ ≠ 0

شكل ڤن :



نُلاحظ أن المقدّمة الأولى (أ ب) فئة فارغة (مضللة) و المقدّمة الثانية (ب جَ) هي كذلك فئة فارغة (وهي مضللة) ومشتركة مع الأولى في جزء من الأجزاء وهو (أ ب جَ) أما النتيجة وهي جزئية فلا تشترك مع المقدّمتين ولا علاقة لها بهما (والمعبّر عنها في الشكل بالمحيط الداكن) وبالتالي القياس فاسد.

تحليل الفئات :

أ ب □ 0 : أ ب جـ + أ ب جَ □ 0

ب جَ □ 0 : أ بُ جَ + أ ب جَ □ 0

أ جـ ≠ 0 : أ ب′ جـ + أ بَ جـ ≠ 0

نُلاحظ أن عنصرا النتيجة غير معطاة في المقدّمتين فإذن هما مجهولتا القيمة وعليه لا ندري قيمة أ تساوي الصفر أم لا ؟ وبالتالي يكون القياس فاسد.

و الله أعلم.

قائمة المراجع

أولا: باللغة العربية

1- الشيخ الرئيس أبو علي بن سينا، الإشارات والتنبيهات ، تحقيق سليمان دنيا، مصر، دار المعارف، ط3، دون تاريخ، القسم 2،ص117.
2 - طه عبد الرحمن ، اللسان والميزان، المركز الثقافي العربي ، بيروت – الدار البيضاء،ط2 ،2006
3 - التهانوي ، كشاف إصطلاحات الفنون والعلوم، تحت إشراف رفيق العجم لبنان ناشرون ، بيروت ، ط1، ج1،
4 - عبد الأمير الأعسم ، المصطلح الفلسفي عند العرب
5 - علي سامي النشار ،المنطق من ارسطو حتى عصورنا الحاضرة ، دار المعرفة الجامعية،مصر ، 2000
6- عادل فاخوري ، المنطق الرياضي ، المؤسسةالجامعية للدراسات و النشر ن بيروت ، ط 2، 1988.
7- محمد مهران ، مقدمة في المنطق الرمزي ، دار الثقافة القاهرة ، 1987 .
8- محمد محمد سالم ،نظريات المنطق الرمزي ، دار المعرفة الجامعية، الإسكندرية، 2002
9 – محمود فهمي زيدان ، المنطق الرمزي نشأته و تطوره ، دار النهضة العربية بيروت ، 1979
10- محمد فتحي الشنيطي ، أسس المنطق و المنهج العلمي ، دار النهضة العربية ،بيروت ، 1970
11- محمد محمد قاسم ، المدخل إلى مناهج البحث العلمي ، دار النهضة العربية ، بيروت ،ط 1 ، 1999.
12 – أسعد الجنابي ، المنطق الرمزي المعاصر ، دار الشروق ، عمان ، ط 1 ، 2007
12 –عادل فاخوري ، منطق العرب ، دار الطليعة ن بيروت ط 3 ،1993.
13-نجيب الحصادي ، أسس المنطق الرمزي المعاصر ن دار النهضة العربية ، بيروت ، ط 1 ، 1993
14- أحمد موساوي ، مدخل جديد إلى المنطق المعاصر ، دار المناهج ،الجزائر، 2007
15- علي الشريف الجرجاني ،كتاب التعريفات ، مكتبة لبنان، بيروت ، 1999

المراجع باللغة الفرنسية

1-Alfred Tarski, Introduction à la logique, Tr J. Tremblay, éd. Gauthier-Villars,paris,1971.
2-Marie –Louise Roure . éléments de logique contemporaine ed P.U.F. paris . 1967.
3- Denis vernant, Introduction à la logique standard, éd.Flammarion, Paris , 2001.
4-François Lepage, Eléments de logique contemporaine ,éd.P.U . Montréal , 2010.
5- Thierry Lucas, initiation à logique formelle, éd . de boeck,Bruxelles ,2007.
6- Xavier Verley, Logique symbolique, éd.Ellipses, Paris, 1999.
7-Laurence Bouquiaux et Bruno Leclercq, Logique formelle et argumentation , éd. De boecq, Bruxelles,2009.